Une approche différentielle du… calcul différentiel

1 Histoire des mathématiques et didactique des mathématiques

Hypothèse

difficultés des étudiantes et étudiants = difficultés de l'humanité

J. Piaget et R. García, **Psychogenèse et histoire des sciences** Paris : Flammarion, 1983.

J. Fauvel et J. A. van Maanen, Éd., **History in mathematics education** Dordrecht ; Boston : Kluwer Academic Publishers, 2000.

A. Karp et G. Schubring, Éd., **Handbook on the history of mathematics education** New York : Springer, 2014.

H. N. Jahnke et al., **The use of original sources in the mathematics classroom**, dans History in Mathematics Education, J. Fauvel et J. V. Maanen, Éd. Springer Netherlands, 2002, p. 291-328.

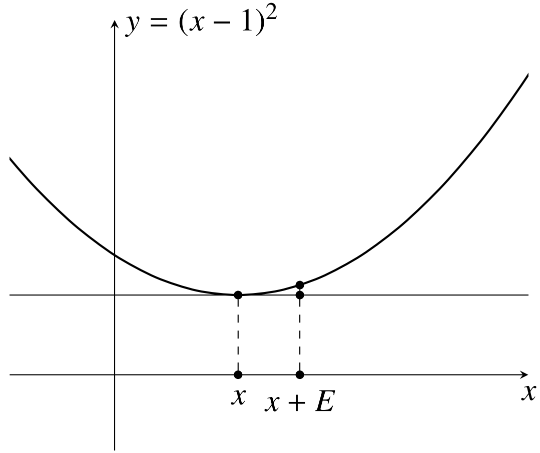
1.1 Fermat

Methodus ad disquirendam maximam et minimam

« adéquation »

$$((x+E)-1)^2 \approx (x-1)^2$$
$$(x+E)^2 - 2(x+E) + 1^2 \approx x^2 - 2x + 1$$
$$x^2 + 2xE + E^2 - 2x - 2E + 1 \approx x^2 - 2x + 1$$
$$\cancel{x^2} + 2xE + E^2 - \cancel{2x} - 2E + \cancel{1} \approx \cancel{x^2} - \cancel{2x} + \cancel{1}$$
$$2xE + E^2 - 2E \approx 0$$
$$(2x + E - 2)E \approx 0$$
$$2(x-1)E \approx 0$$
$$2(x-1) = 0$$
$$x = 1$$

$\boxed{f(x+E) \approx f(x) \text{ au sommet}}$



1.2 Liebniz

« Nouvelle méthode pour les maxima et minima, et de même pour les tangentes, qui ne s'oppose ni aux quantités fractionnaires, ni irrationnelles, et un genre de calcul pour eux »

Démontré par Liebniz

$$dy \overset{\text{def}}{=} (\text{pente de la tangente })\, dx$$

$$d\overline{au} = adu$$

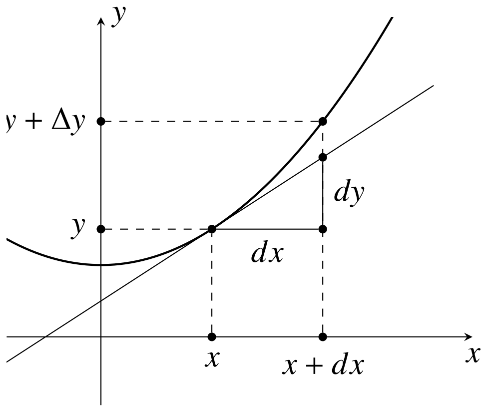
$$d\overline{u+v} = du + dv$$

$$d\overline{uv} = vdu + udv$$

$$d\overline{u/v} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

$$dx^n = nx^{n-1}\, dx$$

$$\boxed{dy \approx \Delta y}$$



1.3 Euler

Si $y = f(x) = x^3$, alors

$$\begin{aligned} dy &= (x+dx)^3 - x^3 \\ &= (x^3 + 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3) - x^3 \\ &= 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3 \\ &= (3x^2 + 3xdx + dx^2)\,dx \\ &= (3x^2 + 3xdx + dx^2)\,dx \\ &\approx 3x^2\,dx \text{ car } dx \text{ est infinitésimal.} \end{aligned}$$

On a donc que

$$d.x^3 = 3x^2\,dx.$$

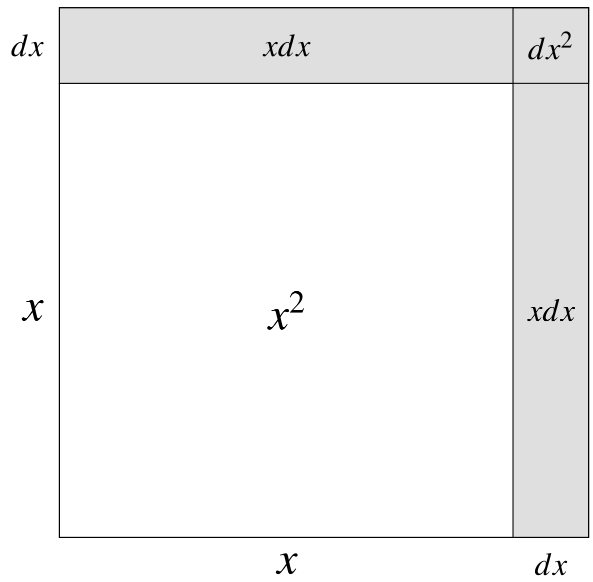
Si $y = x^3$, alors

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(x+dx)^3 - x^3}{dx} \\ &= \frac{(x^3 + 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3) - x^3}{dx} \\ &= \frac{3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3}{dx} \\ &= \frac{\cancel{dx}(3x^2 + 3xdx + dx^2)}{\cancel{dx}} \\ &= 3x^2 + 3xdx + dx^2 \\ &\approx 3x^2 \text{ car } dx \text{ est infinitésimal.} \end{aligned}$$

La dérivée est donc

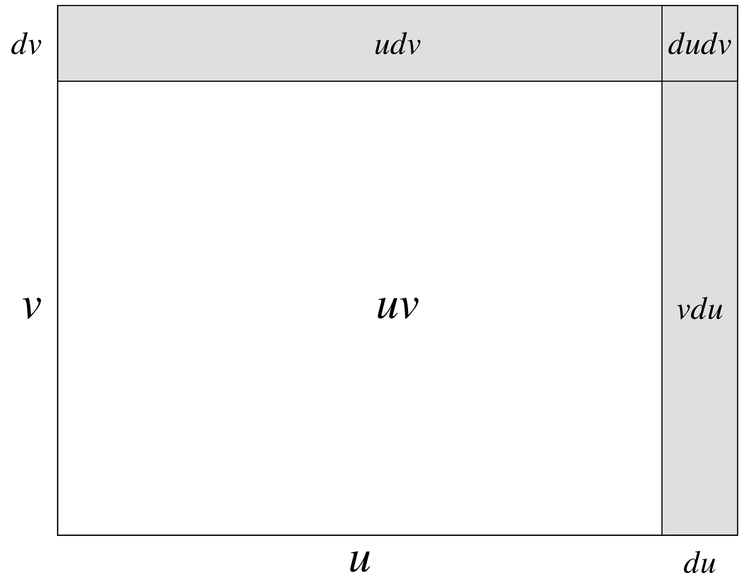
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

1.4 Raccourci graphique



$$d(x^2) = 2xdx + dx^2 = (2x + dx)\,dx \approx 2x\,dx$$

1.5 Dérivée d'un produit

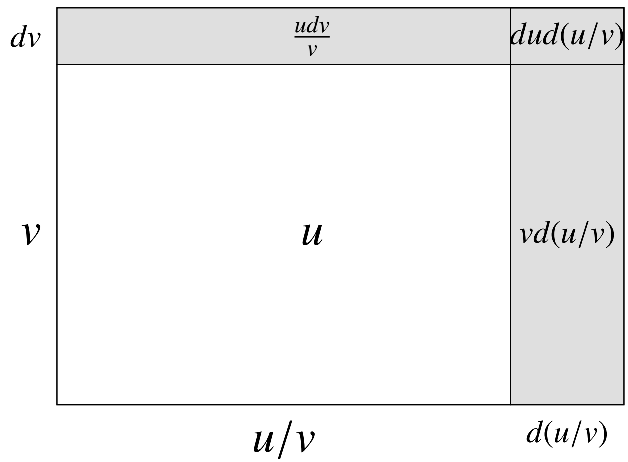


$$(u + du)(v + dv) = uv + udv + vdu + dudv \approx uv + (udv + vdu)$$

$$d(uv) = udv + vdu$$

1.6 Dérivée d'un quotient

$$
\begin{aligned}
d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{u+du}{v+dv} - \frac{u}{v} \\
&= \frac{v(u+du) - u(v+dv)}{v(v+dv)} \\
&= \frac{(vu + v\,du) - (uv + u\,dv)}{v^2 + vdv} \\
&= \frac{vu + v\,du - uv - u\,dv}{v^2 + vdv} \\
&= \frac{v\,du - u\,dv}{v^2 + vdv} \\
&\approx \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}
\end{aligned}
$$



$$du \approx \frac{udv}{v} + d(u/v)$$

$$d(u/v) = \frac{udv}{v} - du$$

$$d(u/v) = \frac{udv - vdu}{v^2}$$

1.7 Règle de chaine

$$dz = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}dx$$

2 Conclusion

- — Permet de revenir plusieurs fois sur la définition.
- — Permet une approche plus géométrique.
- — Part du ratio connu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- — Insiste davantage sur l'interprétation géométrique de $\frac{dy}{dx}$.
- — Meilleure maitrise de $f(x+dx)$!
- — Meilleure maitrise du sens de $\frac{dy}{dx}$! Règle de chaine version Liebniz préférée !
- — Difficulté avec $u+du$ si $x \to x+dx$.
- — Plus stimulant pour le prof !