Les dérivées des fonctions sinus et cosinus

Dominic Klyve*

28 avril 2026

Introduction

Tout étudiant en calcul apprend la « définition de la dérivée ». Il est possible qu'on vous ait même demandé de la mémoriser pour un examen ou une interrogation. La plupart des manuels de calcul publiés aujourd'hui utilisent la définition par la « limite », qui stipule que pour une fonction donnée $f(x)$, la valeur de la dérivée $f'(x)$ est égale à

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

pourvu que la limite existe.

Avec cette définition, il n'est pas trop difficile de calculer certaines dérivées simples, comme celle de $f(x) = x^2$. Pour d'autres fonctions, c'est bien plus compliqué. Par exemple, le calcul de la dérivée de $f(x) = \sin(x)$ est assez délicat et nécessite de connaître la valeur d'autres limites.

Cependant, la définition par la limite n'est pas la seule façon dont les dérivées ont été décrites ou définies au fil de l'histoire. En fait, cette définition n'est apparue dans la littérature mathématique qu'au XIX^e^ siècle — plus de 150 ans après la découverte du calcul. Avant que la définition par la limite ne devienne standard, plusieurs autres définitions ont été utilisées. Il y a de bonnes raisons pour lesquelles elles ont été abandonnées (les mathématiciens ultérieurs les ont jugées moins rigoureuses et craignaient des erreurs potentielles), mais dans certains cas, d'autres définitions peuvent rendre la compréhension des dérivées bien plus aisée.

Ce projet porte sur l'une de ces autres définitions et l'utilise pour calculer la dérivée de certaines fonctions trigonométriques d'une manière que vous trouverez peut-être bien plus directe que ce qui figure dans votre manuel de calcul. Tous les textes ci-dessous proviennent des *Institutiones Calculi Differentialis* (Fondements du calcul différentiel) de Leonhard Euler [**?**]. Rédigé presque 100 ans après l'invention du calcul par Isaac Newton et Gottfried Leibniz, cet ouvrage représente la tentative d'Euler de rassembler toutes les idées du calcul différentiel développées jusqu'alors (y compris le calcul à plusieurs variables et les équations différentielles) en un seul livre autonome.

*Département de Mathématiques, Central Washington University, Ellensburg, WA 98926 ; `dominic.klyve@cwu.edu`.

Dans la préface de son ouvrage, Euler a commencé par expliquer ce que sont les fonctions. Cela peut sembler étrange, mais l'idée de fonction était tout à fait nouvelle à l'époque — on peut considérer les fonctions comme des outils sophistiqués développés pour faciliter le calcul. En fait, certains historiens attribuent à Euler l'invention de la fonction [?]. Dans la partie 1, vous lirez l'explication d'Euler et répondrez à quelques questions. Dans la partie 2 (à réaliser en classe le lendemain), vous plongerez plus en détail dans le travail d'Euler.

Partie 1 : Introduction à la dérivée

Commençons par lire quelques extraits d'Euler :

> Les quantités qui dépendent d'autres quantités de cette façon — c'est-à-dire celles qui changent lorsque d'autres changent — sont appelées *fonctions* de ces quantités. Cette définition s'applique de manière assez large et englobe toutes les façons dont une quantité peut être déterminée par d'autres. Ainsi, si x désigne la quantité variable, toutes les autres quantités qui en dépendent d'une façon ou d'une autre ou qui sont déterminées par elle sont appelées ses fonctions. Par exemple : x^2, le carré de x, ou n'importe quelle autre puissance de x, et même les quantités composées à partir de ces puissances de toute manière, y compris les transcendantes — en général, tout ce qui dépend de x de telle sorte que lorsque x augmente ou diminue, la fonction change.

Tâche 1

(a) Cherchez la définition d'une fonction dans votre manuel de calcul. En quoi l'explication d'Euler est-elle similaire (ou différente) de la vôtre ?

(b) Que pensez-vous qu'Euler entendait par « transcendantes » ? Donnez quelques exemples de fonctions que nous considérerions aujourd'hui comme des fonctions transcendantes.

Dès qu'il a expliqué les fonctions, Euler est immédiatement passé à l'idée centrale de tout son ouvrage — une compréhension des dérivées. Lisez l'extrait suivant au moins une fois dans son intégralité pour avoir une vue d'ensemble de sa démarche, puis répondez à l'Étape 2. Après cette étape, nous examinerons cet extrait paragraphe par paragraphe afin de l'analyser plus en détail.

> De ce fait naît une question ; à savoir, si la quantité x est augmentée ou diminuée, de combien la fonction change-t-elle, qu'elle augmente ou diminue ? Pour les cas les plus simples, cette question est facile à répondre. Si la quantité x est augmentée de la quantité ω, son carré x^2 reçoit un accroissement de $2x\omega + \omega^2$.
>
> Ainsi, l'accroissement de x est à l'accroissement de x^2 comme ω est à $2x\omega + \omega^2$, c'est-à-dire comme 1 est à $2x + \omega$. De façon similaire, nous considérons le rapport de l'accroissement de x à l'accroissement ou à la diminution que reçoit toute fonction de x.
>
> En effet, l'étude de ce type de rapport d'accroissements n'est pas seulement très importante ; elle constitue en fait le fondement de toute l'analyse de l'infini. Afin de le rendre encore plus

clair, reprenons l'exemple du carré x^2 avec son accroissement de $2x\omega + \omega^2$, qu'il reçoit lorsque x lui-même est augmenté de ω. Nous avons vu que le rapport ici est $2x + \omega$ à 1. Il doit être parfaitement clair que plus l'accroissement est petit, plus ce rapport se rapproche du rapport de $2x$ à 1.

Cependant, il n'atteint ce rapport qu'à partir du moment où l'accroissement ω lui-même s'annule complètement. Nous comprenons ainsi que si l'accroissement de la variable x tend vers zéro, l'accroissement de x^2 s'annule aussi. Cependant, le rapport vaut $2x$ pour 1. Ce que nous avons dit ici du carré doit être compris de toutes les autres fonctions de x ; c'est-à-dire que lorsque leurs accroissements s'annulent en même temps que l'accroissement de x, ils ont un rapport certain et déterminable. Nous sommes ainsi conduits à une définition du calcul différentiel : c'est *une méthode pour déterminer le rapport des accroissements qui s'annulent que prennent les fonctions lorsque la variable dont elles sont fonctions reçoit un accroissement qui s'annule.*

Tâche 2

(a) Quel était selon vous l'objectif d'Euler dans cet extrait ?

(b) Rédigez au moins un commentaire et une question sur ce qu'Euler faisait ici.

Partie 2 : Explorer la dérivée

Revenons sur le travail d'Euler et examinons-le de plus près.

De ce fait naît une question ; à savoir, si la quantité x est augmentée ou diminuée, de combien la fonction change-t-elle, qu'elle augmente ou diminue ? Pour les cas les plus simples, cette question est facile à répondre. Si la quantité x est augmentée de la quantité ω, son carré x^2 reçoit un accroissement de $2x\omega + \omega^2$.

Euler voulait dire ici que pour une fonction (que nous noterions $f(x) = x^2$), remplacer l'argument x par $x + \omega$ augmente la valeur de la fonction de $2x\omega + \omega^2$.

Tâche 3

Essayez par vous-même. Pour $f(x) = x^2$, calculez la différence entre $f(x + \omega)$ et $f(x)$.

Cependant, Euler s'est empressé de préciser qu'il ne s'intéressait pas principalement à la valeur dont $f(x)$ change, mais au rapport entre le changement de $f(x)$ et le changement de x :

Ainsi, l'accroissement de x est à l'accroissement de x^2 comme ω est à $2x\omega + \omega^2$, c'est-à-dire comme 1 est à $2x + \omega$. De façon similaire, nous considérons le rapport de l'accroissement de x à l'accroissement ou à la diminution que reçoit toute fonction de x.

Tâche 4

Comparez l'affirmation d'Euler sur les rapports avec la définition de la dérivée donnée au début de ce projet. En quoi sont-elles similaires ? En quoi diffèrent-elles ?

Euler n'avait plus qu'à introduire une dernière idée importante, à savoir qu'il considérerait souvent ω comme une valeur très (très !) petite, en s'intéressant toujours au rapport décrit ci-dessus.

En effet, l'étude de ce type de rapport d'accroissements n'est pas seulement très importante ; elle constitue en fait le fondement de toute l'analyse de l'infini. Afin de le rendre encore plus clair, reprenons l'exemple du carré x^2 avec son accroissement de $2x\omega + \omega^2$, qu'il reçoit lorsque x lui-même est augmenté de ω. Nous avons vu que le rapport ici est $2x + \omega$ à 1. Il doit être parfaitement clair que plus l'accroissement est petit, plus ce rapport se rapproche du rapport de $2x$ à 1.

Tâche 5

(a) Regardez vos calculs de l'Étape 3. Est-il vrai que le rapport de $f(x+\omega) - f(x)$ à ω se rapproche de $2x$ lorsque ω diminue ?

(b) Encore une fois, comment cette idée se compare-t-elle à la définition de la dérivée au début de ce projet ?

Historiquement, de nombreux débats avaient eu lieu sur ce que signifie avoir un nombre (comme ω) presque égal à 0, sans être 0. Euler connaissait très bien ces arguments et tenait à convaincre le lecteur qu'il n'y avait aucun problème philosophique avec sa méthode de calcul différentiel. Il a conclu son argumentation et expliqué la nature du calcul dans la section suivante.

Cependant, il n'atteint ce rapport qu'à partir du moment où l'accroissement ω lui-même s'annule complètement. Nous comprenons ainsi que si l'accroissement de la variable x tend vers zéro, l'accroissement de x^2 s'annule aussi. Cependant, le rapport vaut $2x$ pour1. Ce que nous avons dit ici du carré doit être compris de toutes les autres fonctions de x ; c'est-à-dire que lorsque leurs accroissements s'annulent en même temps que l'accroissement de x, ils ont un rapport certain et déterminable. Nous sommes ainsi conduits à une définition du calcul différentiel : c'est *une méthode pour déterminer le rapport des accroissements qui s'annulent que prennent les fonctions lorsque la variable dont elles sont fonctions reçoit un accroissement qui s'annule.*

Tâche 6

(a) Que pensez-vous de l'affirmation d'Euler selon laquelle « ...si l'accroissement de la variable x tend vers zéro, l'accroissement de x^2 s'annule aussi. Cependant, le rapport vaut $2x$ pour 1. » ? Êtes-vous convaincu ?
(b) Comment cette affirmation se compare-t-elle à la définition par la limite de la dérivée ?
(c) Laquelle de ces méthodes pour trouver la dérivée de x^2 préférez-vous, et pourquoi ?

Bien qu'Euler ait d'abord utilisé le symbole ω pour représenter un accroissement, il a rapidement changé de notation — puisque l'accroissement qu'il considérait représentait un très petit changement de x, il l'appellerait dx pour le reste de son ouvrage (le « d », pour lui, suggérait « différence »).

Partie 3 : Fonctions trigonométriques

Euler a consacré certaines parties de ses *Fondements du calcul différentiel* à expliquer pourquoi le calcul fonctionne, et une grande partie du reste à résoudre de nombreux problèmes de dérivation. Au 201ᵉ paragraphe (tous les paragraphes sont numérotés), Euler était prêt à s'attaquer à $\sin(x)$. Lisez ce paragraphe au moins une fois dans son intégralité pour avoir une vue d'ensemble de sa démarche. Dans les étapes qui suivent cet extrait, nous décomposerons son argument pièce par pièce afin de l'examiner en détail.

201. Il reste quelques quantités ... à savoir les sinus et les tangentes d'arcs donnés, et nous devons montrer comment on les différencie. Soit x un arc circulaire et $\sin x$ son sinus, dont nous cherchons à déterminer la différentielle. Posons $y = \sin x$ et remplaçons x par $x + dx$, de sorte que y devienne $y + dy$. Alors $y + dy = \sin(x + dx)$ et

$$dy = \sin(x + dx) - \sin x.$$

Or

$$\sin(x + dx) = \sin x \cdot \cos dx + \cos x \cdot \sin dx,$$

et puisque, comme nous l'avons montré dans l'*Introductio*,

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots ,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots ,$$

en excluant les termes qui s'annulent, on obtient $\cos dx = 1$ et $\sin dx = dx$, de sorte que

$$\sin(x + dx) = \sin x + dx \cos x.$$

Ainsi, en posant $y = \sin x$, on a

$$dy = dx \cos x.$$

Donc, la différentielle du sinus d'un arc quelconque est égale au produit de la différentielle de l'arc par le cosinus de l'arc.

Tâche 7

(a) Quel était selon vous l'objectif d'Euler dans cet extrait ?

(b) Rédigez au moins un commentaire et une question sur ce qu'Euler faisait ici.

Il y avait beaucoup à comprendre dans le passage ci-dessus. Décomposons-le pour l'examiner de plus près.

201. Il reste quelques quantités ... à savoir les sinus et les tangentes d'arcs donnés, et nous devons montrer comment on les différencie. Soit x un arc circulaire et $\sin x$ son sinus, dont nous cherchons à déterminer la différentielle. Posons $y = \sin x$ et remplaçons x par $x + dx$, de sorte que y devienne $y + dy$. Alors $y + dy = \sin(x + dx)$ et

$$dy = \sin(x + dx) - \sin x.$$

Tâche 8

Notez ici qu'Euler considère dy comme la variation de la fonction sinus entre x et $x + dx$. Tracez et annotez un graphique illustrant son affirmation que $dy = \sin(x + dx) - \sin x$.

Dans la suite de son travail, Euler avait besoin de deux nouvelles idées. La première, la formule d'addition pour $\sin(x)$, que vous avez probablement apprise en cours de trigonométrie, indique que

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \sin(b).$$

Tâche 9

Vérifions que nous croyons à cette formule d'addition.

(a) Prenez $a = \pi/6$ et $b = \pi/3$, et vérifiez si l'équation ci-dessus est satisfaite. (Vous devriez pouvoir le faire sans calculatrice.)

(b) Testez à nouveau avec $a = \pi/6$ et $b = \pi/6000$ (ou un autre angle très petit). Que remarquez-vous à propos des deux termes du membre droit de l'équation de la formule d'addition ?

La deuxième idée dont Euler avait besoin pour trouver la dérivée du sinus consiste à représenter les fonctions transcendantes (comme le sinus) sous forme de somme de puissances infinies de x. Pour Euler, cela relevait aussi de la pré-analyse, et il en avait exposé les détails dans son manuel appelé *Introductio in Analysin Infinitorum* (ou *Introduction à l'Analyse de l'Infini*), mais de nos jours, nous enseignons généralement cette idée (appelée « séries de Taylor ») dans nos cours de calcul. Consultez la table des matières de votre manuel : vous y trouverez peut-être que vous étudierez les séries de Taylor dans quelques semaines.

Heureusement, nous n'avons pas besoin de connaître grand-chose sur ces fascinantes représentations de fonctions pour suivre ce qu'Euler a fait ensuite. Tout ce que nous devons savoir, c'est que $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ est très proche de $\sin x$ — en particulier pour les petites valeurs de x ! De même, $\cos x$ est très proche de la valeur $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

Tâche 10

(a) Essayez par vous-même. Choisissez une petite valeur de x (disons, inférieure à 0,25 en valeur absolue), et utilisez votre calculatrice pour calculer $\sin x$ et $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$. Les deux valeurs sont-elles proches ? Faites de même pour l'approximation de $\cos x$ donnée ci-dessus.

(b) Si vous avez une calculatrice graphique, essayez de tracer $\sin x$ et $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$. Semblent-ils égaux près de 0 ? À partir de quel endroit commencent-ils à diverger ?

Nous sommes maintenant prêts à lire le calcul d'Euler de la dérivée de $\sin x$.

Or

$$\sin(x + dx) = \sin x \cdot \cos dx + \cos x \cdot \sin dx,$$

et puisque, comme nous l'avons montré dans l'*Introductio*,

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots ,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots ,$$

en excluant les termes qui s'annulent, on obtient $\cos dx = 1$ et $\sin dx = dx$, de sorte que

$$\sin(x + dx) = \sin x + dx \cos x.$$

Ainsi, en posant $y = \sin x$, on a

$$dy = dx \cos x.$$

Donc, la différentielle du sinus d'un arc quelconque est égale au produit de la différentielle de l'arc par le cosinus de l'arc.

Tâche 11

(a) Que voulait dire Euler par les « termes qui s'annulent » ? (Considérez ce qui arrive aux développements de $\sin x$ et $\cos x$ lorsque x est très proche de 0.)

(b) Vérifiez l'algèbre d'Euler pour voir si vous êtes d'accord avec ses conclusions.

Euler a ensuite calculé la dérivée de $\cos x$ d'une manière similaire. Vous vous souvenez peut-être (vous en souvenez-vous ?) de la formule d'addition pour le cosinus, à savoir $\cos(a+b) = \cos(a)\cdot\cos(b) - \sin(a)\cdot\sin(b)$.

Tâche 12

Utilisez cette formule et la méthode suivie par Euler pour le sinus afin de calculer la dérivée de $\cos(x)$. Obtenez-vous le même résultat que dans votre manuel ?

Notes pour l'instructeur

Objectifs

Ce projet de source primaire (PSP) poursuit deux objectifs principaux : aider les étudiants à développer une compréhension plus profonde et plus intuitive de la définition par la limite de la dérivée, et comprendre pourquoi la dérivée du sinus est le cosinus, grâce à une démonstration qui peut sembler plus directe que celle qui apparaît habituellement dans les manuels de calcul modernes. Un objectif secondaire est de calculer des dérivées en utilisant rien de plus que des identités trigonométriques et de l'algèbre — rendant ainsi certains aspects du calcul moins mystérieux.

Contexte

Le PSP ne repose que sur une seule source primaire : les *Fondements du calcul différentiel* de Leonhard Euler, publiés en 1755. C'était le premier manuel de calcul à utiliser les fonctions ; en effet, Euler lui-même avait été le premier mathématicien à utiliser régulièrement une approche semblable à celle des fonctions, environ sept ans auparavant, dans son grand livre de « pré-analyse », l'*Introductio in analysin infinitorum* (*Introduction à l'Analyse de l'Infini*). Bien que l'utilisation des fonctions rende le contenu plus accessible aux étudiants d'aujourd'hui, l'approche d'Euler est suffisamment différente de celle des manuels modernes pour obliger les étudiants à réfléchir attentivement à la matière.

La différence majeure dans l'approche d'Euler est l'absence de limites dans son travail. Le concept de limite ne serait formellement défini et intégré aux mathématiques qu'un siècle plus tard ; Euler fondait son calcul (à la suite de Leibniz) sur la différentielle dx, qui représentait un accroissement infiniment petit de la variable x. Bien que les problèmes logiques de cette approche allaient conduire les mathématiciens du XIX$^{\text{e}}$ siècle à l'abandonner (au profit des limites), Euler n'y voyait aucun problème. (J'ai constaté que mes étudiants, de même, ne sont pas perturbés par la notion d'un accroissement infiniment petit de x, ni par la considération de l'accroissement correspondant $f(x + dx) - f(x)$.)

L'aspect peut-être le plus surprenant de l'approche d'Euler est son utilisation des séries de Taylor. En fait, il les a introduites dans l'*Introductio* et les considérait comme une idée de pré-analyse. Ce projet peut être la première fois que les étudiants voient ces séries, mais ils n'ont besoin d'aucune théorie des séries de Taylor pour mener à bien le projet. Les approximations du sinus et du cosinus à l'aide d'une série de Taylor à trois termes sont présentées comme un *fait accompli*, et les étudiants ont la possibilité de se convaincre de la validité des approximations, même s'ils ne peuvent pas l'expliquer. On espère que cette exposition rendra les séries de Taylor un peu plus abordables lorsqu'ils les rencontreront à l'avenir, mais ce n'est pas un objectif majeur du projet.

Prérequis

Les étudiants n'ont besoin que de peu de connaissances préalables pour mener à bien ce PSP. Il sera utile qu'ils aient vu les identités trigonométriques utilisées dans le projet, mais celles-ci sont réintroduites ici au cas où ils ne les connaîtraient pas. Il serait utile que les étudiants aient été initiés à la définition par la limite de la dérivée, car ce projet leur offrirait alors un second angle d'approche du concept, bien que ce ne soit pas strictement nécessaire non plus. Aucune autre connaissance préalable en dehors de l'algèbre n'est requise.

Préparation de l'enseignement de ce PSP

Ce PSP est conçu avec une certaine mise en œuvre à l'esprit (bien que de nombreuses autres approches soient bien sûr possibles). La partie 1 est destinée à être assignée comme lecture préparatoire à faire à la maison. Les étudiants doivent lire les sources primaires et répondre aux Étapes 1 et 2 avant de venir en classe. Le temps en classe peut être consacré à une combinaison de travail en petits groupes ou d'exposé magistral guidé. (Je préfère la première option, mais si les étudiants n'ont pas l'habitude de travailler en groupes en classe, un encadrement plus important de l'instructeur sera probablement nécessaire.)

Notez que la partie 2 contient deux types distincts de questions — des questions mathématiques, dans lesquelles les étudiants font des calculs, et des questions plus abstraites, dans lesquelles les étudiants sont invités à réfléchir à l'approche d'Euler en matière de dérivées et à la comparer à celle qu'on leur a enseignée. Les étudiants seront souvent en mesure de compléter toute cette section lors d'une période de cours de 50 minutes, et commenceront à travailler sur la partie 3. Si la partie 3 n'est pas achevée pendant le cours, une bonne option consiste à demander aux étudiants de terminer l'Étape 7 à la maison, avec le projet de finir le reste de la tâche en classe lors du deuxième jour.

Lorsque les groupes ont terminé leur travail, je suggère de conclure le projet par une discussion guidée dans laquelle les étudiants (et l'instructeur) réfléchissent aux deux façons qu'ils ont maintenant vues de trouver des dérivées. Les étudiants peuvent à ce stade demander s'ils peuvent essayer d'utiliser les différentielles d'Euler pour trouver les dérivées d'autres fonctions. Un exemple amusant à démontrer ou à leur donner à essayer comme problème facultatif et/ou bonus (et difficile à chercher sur Internet !) est $\ln(x)$. Je donnerais aux étudiants comme indication que $\ln(1+x)$ peut être approximé par une série de Taylor comme $\ln(x+1) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, et je les laisserais se débrouiller !

Le fichier source LaTeX de ce mini-PSP original en anglais est disponible auprès de l'auteur sur demande à l'adresse `dominic.klyve@cwu.edu`. Traduction en français par Yannick Delbecque (`https://yannick.delbecque.org`)

Remerciements

Le développement de ce projet étudiant a été partiellement soutenu par le programme TRIUMPHS (*Transforming Instruction in Undergraduate Mathematics via Primary Historical Sources*) avec le financement du programme d'amélioration de l'enseignement des STIM au niveau universitaire de la National Science Foundation, sous le numéro de subvention 1524098. Les opinions, conclusions et recommandations exprimées dans ce projet sont celles de l'auteur et ne représentent pas nécessairement les points de vue de la National Science Foundation. Pour plus d'informations sur TRIUMPHS, visitez `http://webpages.ursinus.edu/nscoville/TRIUMPHS.html`.