Compléter le carré : aux racines de l'algèbre

Daniel E. Otero [*]

24 septembre 2019

1 Introduction

La plupart des étudiantes et étudiants apprennent aujourd'hui à résoudre des *équations du second degré*, des équations de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{$*$}$$

où a, b et c sont des nombres et a est différent de 0.

Dans les traitements introductifs de l'algèbre, une attention particulière est d'abord portée à la résolution de telles équations par *factorisation*, le procédé parfois délicat qui consiste à inverser la multiplication d'expressions linéaires en l'inconnue. Cette méthode vise à remplacer $(*)$ par une équation équivalente de la forme

$$a(x - r_1)(x - r_2) = 0, \tag{$**$}$$

dont les solutions $x = r_1, r_2$ s'obtiennent aisément.

Le passage de $(*)$ à $(**)$ n'est pas immédiat. Même dans les cas les plus simples où a, b, c, r_1 et r_2 sont tous entiers, maintenir en tête toute l'arithmétique associée à la procédure de factorisation n'est pas chose facile et exige généralement beaucoup de pratique pour être maîtrisée avec succès.

Il n'est guère difficile de trouver des équations du second degré à petits coefficients entiers a, b, c dont les solutions sont des nombres *irrationnels*, ce qui rend la factorisation diaboliquement ardue ; c'est à ce stade que les résolveurs tendent à « jeter l'éponge » et à réclamer une voie plus commode. Le salut arrive sous la forme de la *formule quadratique*,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

formule dont la complexité est contrebalancée par deux assurances : (1) elle est universellement applicable pour résoudre toute équation du second degré, et (2) elle contourne entièrement la factorisation ! Mais le prix à payer pour ces précieux avantages se manifeste par l'impénétrabilité de la formule. Comment se fait-il que la formule produise des résultats aussi fiables ? Et d'où vient-elle ? Les choses peuvent empirer : dans certains cas, la formule quadratique donne des *nombres complexes* comme solutions, des nombres qui ne correspondent pas à des valeurs familières sur la droite des réels (ni sur certaines calculatrices) !

Une issue à cette impasse, permettant de mieux comprendre ce qui se passe, réside dans une autre méthode pour résoudre $(*)$, appelée *compléter le carré*. Ici, le résolveur doit d'abord « simplifier » $(*)$

[*] Xavier University, Cincinnati, OH, 45207-4441 ; `otero@xavier.edu`.

en divisant par a pour ramener le coefficient dominant à 1. Vient ensuite l'étape clé, dans laquelle le résolveur effectue un calcul très précis (mais encore non motivé) : prendre la moitié du coefficient de x, l'élever au carré, et ajouter ce carré aux deux membres de l'équation. Cette « incantation » permet de reformuler l'équation sous une forme facile à factoriser et donc directement soluble. En appliquant cette procédure dans toute sa généralité, la formule quadratique en découle naturellement. Autrement dit, c'est en comprenant pleinement la méthode de complétion du carré que la formule quadratique s'explique.

Ce projet de source primaire a été conçu pour lever le voile sur ces mystérieuses procédures. En étudiant les écrits d'un homme qui vécut il y a plus de mille ans, le lecteur peut découvrir comment et pourquoi les procédures décrites ci-dessus fonctionnent.

2 Les racines de l'algèbre

Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī [1] (v. 780–850 APR. J.-C.) est l'une des grandes figures légendaires de l'histoire des mathématiques. Vers l'an 820, le calife al-Ma'mūn [2] convoqua al-Khwārizmī à Bagdad pour rejoindre son équipe de savants, où il apporta des contributions importantes à l'astronomie mathématique et à ses applications pour l'élaboration de calendriers et d'almanachs, utilisés pour prédire les dates des événements célestes, les fêtes de l'islam et la *qibla* (direction) pour la prière quotidienne. [3] Il rédigea des travaux en cartographie et en géographie pour cartographier le monde connu, et réalisa également des avancées majeures en mathématiques pures. [4]

L'œuvre la plus importante d'al-Khwārizmī, et la source des textes que nous rencontrerons dans ce projet, est considérée comme le premier ouvrage écrit en algèbre. Rédigé vers l'an 825, il porte le titre *al-Kitāb al-mukhtaṣar fī hisāb al-jabr wal-muqābala* [5] (*Le livre abrégé sur le calcul par la restauration et la réduction*) — ci-après désigné par son nom plus courant et bien plus court, *Algèbre* — et il connut un succès immédiat et durable en tant qu'ouvrage de résolution quantitative de problèmes. Il représentait une avancée importante dans l'art du calcul arithmétique, en ce qu'il offrait non seulement des méthodes de calcul pour effectuer sommes, différences, produits, rapports et extractions de racines de nombres dans la résolution de nombreux problèmes pratiques courants, mais il classifiait aussi de nombreux types de problèmes et exposait des méthodes systématiques pour les résoudre au moyen de cette classification. Pour la première fois, les méthodes de résolution computationnelle de problèmes étaient présentées non pas problème par problème de manière *ad hoc*, mais pour des familles entières de problèmes à la fois.

Dans ce qui suit, nous présentons des extraits de l'*Algèbre* d'al-Khwārizmī, en utilisant deux traductions anglaises : l'une par l'orientaliste du XIX^{e}siècle Frederic Rosen [al Khwārizmī, 1831], et

1. Se prononce *mu-HAM-ad ib'n MOO-suh ahl-qua-RIZ-mee.*
2. Se prononce *ahl-mah'-MOON*
3. Les musulmans sont tenus de prier cinq fois par jour — à l'aube, à midi, en milieu d'après-midi, au coucher du soleil et la nuit. Ces prières doivent être accomplies en se tournant vers La Mecque, direction appelée *qibla.* Bien entendu, cette direction varie selon l'endroit où se trouve le croyant sur la Terre, et elle est déterminée pour chaque lieu par des méthodes d'astronomie mathématique.
4. Pour des informations biographiques sur al-Khwārizmī, le lecteur est renvoyé à [Katz, 1998], [Lindberg, 1992] ou [Saliba, 2007]. Pour une histoire plus générale de la science islamique au Moyen Âge, voir, en plus des sources précédentes, [Berggren, 2003] et [Katz et al., 2007].
5. Se prononce *ahl ki-TAHB ahl-muk-TAH-sahr fih hih-SAHB ahl-JAB'r wal-moo-KAH-bah-lah.*

l'autre une édition savante plus récente par Roshdi Rashed [6] [Rāshid, 2009].

Après avoir rendu grâce à Dieu, au Prophète Mahomet et au calife al-Ma'mūn (dans cet ordre, bien sûr !), al-Khwārizmī ouvrit son *Algèbre* ainsi :

> Quand j'ai considéré ce que les gens veulent généralement calculer, j'ai trouvé que c'est toujours un nombre. . . . J'ai observé que les nombres requis dans le calcul par Restauration et Réduction sont de trois espèces, à savoir les racines, les carrés et les nombres simples sans relation avec une racine ni un carré.
>
> Une racine est toute quantité qui doit être multipliée par elle-même, composée d'unités, de nombres ascendants ou de fractions descendantes.
>
> Un carré est le montant total de la racine multipliée par elle-même.
>
> Un nombre simple est tout nombre qui peut être énoncé sans référence à une racine ou à un carré.
>
> Un nombre appartenant à l'une de ces trois espèces peut être égal à un nombre d'une autre espèce ; on peut ainsi dire, par exemple, « les carrés sont égaux aux racines », ou « les carrés sont égaux aux nombres », ou « les racines sont égales aux nombres ».

Pour comprendre ce qu'al-Khwārizmī entendait par les « trois espèces » de « nombres requis dans le calcul par Restauration et Réduction », il est utile de réfléchir aux mots qu'il utilisait pour désigner chaque classe. Tout comme une plante pousse à partir de ses racines, ou que l'histoire personnelle de quelqu'un est désignée par ses « racines », il utilisait le mot « racine » ici dans un sens similaire mais mathématique, pour désigner une quantité à partir de laquelle une autre est engendrée. [7] De même, pour nommer le deuxième type de nombre, il utilisait le mot « carré » dans un sens très évocateur, décrivant explicitement le procédé de calcul numérique de l'aire d'un carré géométrique ayant « la racine » pour côté.

Enfin, al-Khwārizmī utilisait le terme « simple » pour qualifier les nombres d'une troisième sorte, un peu moins complexe, à savoir ceux « qui peuvent être énoncés sans référence à une racine ou à un carré ». Pour mieux saisir ce qu'il entendait par là, il est utile de savoir que, dans sa discussion ultérieure de la résolution de problèmes, la « racine » était toujours identifiée à la quantité inconnue, qu'al-Khwārizmī appelait aussi la « chose ». Par exemple, dans un problème de succession qu'al-Khwārizmī résolut plus loin dans l'*Algèbre*, il parlait de « trois *dirhams* [8] plus un tiers de *dirham* plus un tiers de chose ». Dans l'expression « un tiers de chose », le nombre « un tiers » n'est pas « simple » car il précise le nombre de « racines ». En revanche, dans l'expression « trois *dirhams* plus un tiers de *dirham* », les nombres « trois » et « un tiers » sont « simples » car ils peuvent « être énoncés sans référence à une racine ou à un carré » ; autrement dit, ils ne sont pas associés à un nombre de « racines » ou

6. Rashed (né en 1936), également désigné sous le nom Rushdi Rashid, est un éminent historien égyptien des mathématiques.

7. Cet usage du mot *racine* est bien antérieur à al-Khwārizmī et se retrouve dans les travaux des mathématiciens et géomètres grecs de l'Antiquité.

8. Un *dirham* était la monnaie courante à l'époque d'al-Khwārizmī à Bagdad, vraisemblablement la plus grande ville du monde à l'époque, généralement frappé en argent. Le mot arabe *dirham* est dérivé du nom de l'ancienne pièce grecque, la *drachme*, qui était également la monnaie courante du Moyen-Orient à l'époque préislamique.

de « carrés ». Notons que dans la science très pratique de la résolution de problèmes d'al-Khwārizmī, un « nombre simple » était presque toujours identifié à un nombre de *dirhams*, et non à une quantité sans unité.

Cet exemple pointe vers une autre caractéristique du contexte de résolution de problèmes propre à la perspective d'al-Khwārizmī et de ses contemporains : *les nombres étaient (presque toujours) supposés positifs*. Ils servaient à compter ou à mesurer des quantités de choses, en particulier lorsqu'ils intervenaient dans des problèmes à résoudre. Et bien qu'ils puissent ne pas provenir directement de problèmes réels, ils étaient au moins réalistes dans leur forme. En particulier, un nombre de *dirhams* n'était considéré comme négatif que dans le contexte particulier où il était simultanément considéré comme faisant partie d'une dette, mais la racine d'un carré ne pouvait jamais être négative, car elle représentait une longueur.

Revenons à la description des différentes classes de quantités qu'al-Khwārizmī a énumérées au début de son *Algèbre*. Dans la dernière phrase de cette description, il identifiait les trois types d'équations que l'on peut former en posant l'égalité de deux de ces trois classes de quantités : « les carrés sont égaux aux racines », « les carrés sont égaux aux nombres », ou « les racines sont égales aux nombres ».

Tâche 1

(a) Al-Khwārizmī donna les trois exemples suivants d'équations polynomiales. Lequel des trois types listés juste au-dessus correspond à chaque exemple ?

(i) la moitié du carré est égale à dix-huit

(ii) cinq carrés sont égaux à dix racines

(iii) quatre racines sont égales à vingt

(b) Traduisez chacun des trois exemples ci-dessus en forme symbolique et résolvez les équations, à la fois au sens d'al-Khwārizmī (les nombres doivent être positifs) et au sens moderne plus général. Attention : les équations peuvent avoir des nombres de solutions différents selon ce sens !

(c) La représentation la plus générale des types de monômes décrits ici prend les formes symboliques ax^2 (carrés), bx (racines) et c (nombres simples). Utilisez-les pour exprimer symboliquement la forme générale des trois types d'équations d'al-Khwārizmī. Résolvez chacune pour x, en veillant à identifier les conditions qui doivent être satisfaites pour que les étapes employées soient valides. (Par exemple, on ne peut pas diviser par 0 ni prendre la racine carrée d'un nombre négatif si la réponse doit être un nombre réel.)

(d) Le cas « racines égales à nombres » produit une équation dans laquelle la plus haute puissance de x qui apparaît est la première. En mathématiques modernes, de telles équations sont appelées *équations linéaires*. Pourquoi ?

Tâche 2

Considérons l'objet de la préoccupation d'al-Khwārizmī, qu'il a annoncé dans la première phrase de l'extrait ci-dessus. Il l'appelait « ce que les gens veulent généralement calculer ». Dans le contexte des problèmes examinés à la Tâche 1(a), qu'est-ce qu'al-Khwārizmī voulait calculer ? En réfléchissant à cela, que pensez-vous qu'al-Khwārizmī entendait plus généralement par l'expression « ce que les gens veulent généralement calculer » ?

3 Résoudre une équation du second degré

Comme le montre la Tâche 1, les trois premières formes d'équations identifiées par al-Khwārizmī n'impliquaient que deux classes de nombres à la fois, et sont donc relativement simples à résoudre. Sa tâche suivante était de considérer des problèmes plus complexes faisant intervenir les trois classes de nombres à la fois.

J'ai trouvé que ces trois espèces, à savoir les racines, les carrés et les nombres, peuvent être combinées ensemble, et il en résulte ainsi trois espèces composées ; à savoir, « carrés et racines égaux à nombres » ; « carrés et nombres égaux à racines » ; « racines et nombres égaux à carrés ».

Tâche 3

(a) Écrivez les formes symboliques des équations données par ces « trois espèces composées ». Notez que le mot « et » dans chaque expression se représente symboliquement de la même manière.

(b) En mathématiques modernes, les trois « espèces composées » seraient toutes subsumées sous une seule forme, à savoir

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

où aucun des coefficients a, b ou c ne peut être nul. Pourquoi al-Khwārizmī avait-il besoin de trois « espèces » différentes pour décrire ce seul problème ?

Al-Khwārizmī donna des exemples de ses « trois espèces composées » et, dans chaque cas, fournit une recette pour résoudre le problème correspondant, ce qui signifiait pour lui identifier une valeur à la fois pour la « chose » (qui est la « racine ») et pour son « carré ». Voici le premier des cas qu'il traita. (Des numéros encerclés ont été insérés dans le texte ci-dessous uniquement pour faciliter la référence aux étapes de la solution ; *ils ne font pas partie de la source originale.* La tâche qui suit cet extrait nous fera parcourir chacune de ces étapes afin de comprendre la méthode de résolution d'al-Khwārizmī.)

Racines et Carrés sont égaux à Nombres : ① par exemple, « un carré, et dix racines du même, s'élèvent à trente-neuf *dirhams* ; » c'est-à-dire, quel doit être le carré qui, augmenté de dix de ses propres racines, s'élève à trente-neuf ? ② La solution est la suivante : vous divisez par deux le nombre des racines, ce qui dans le présent cas donne cinq. Vous multipliez cela par lui-même ; le produit est vingt-cinq. ③ Ajoutez cela à trente-neuf ; la somme est soixante-quatre. ④ Prenez maintenant la racine de ceci, qui est huit, ⑤ et soustrayez-en la moitié du nombre des racines, qui est cinq ; ⑥ le reste est trois. C'est la racine du carré que vous cherchiez ; ⑦ le carré lui-même est neuf.

Tâche 4 En utilisant le symbolisme algébrique moderne, suivons les étapes d'al-Khwārizmī pour formuler le problème et produire notre propre solution à partir du texte source ci-dessus. Nous analyserons également, au moyen de ce même symbolisme, comment al-Khwārizmī a « manqué » une solution alternative au problème.

(a) Formulez le problème symboliquement sous forme d'équation (étape 1). Notez que ce n'est *pas* ce qu'al-Khwārizmī a fait ! Il ne faisait aucune référence à l'expression de sa solution en termes de symboles quelconques. Ce que vous faites ici est un *traitement moderne* inspiré de ce qu'al-Khwārizmī rapportait dans sa solution. (Nous y reviendrons ci-dessous.)

(b) À l'étape 2, al-Khwārizmī effectua une opération arithmétique liée à l'équation que vous avez formulée en (a). Reliez cette opération à votre équation en modifiant un membre selon l'instruction de l'étape 3, en veillant à modifier aussi l'autre membre. Notez que le nombre d'un côté de l'équation résultante est un carré parfait. Crucial pour notre méthode de résolution, cependant, est que *le côté opposé de l'équation est aussi un carré parfait* ! Factorisez ce polynôme pour vérifier qu'il est bien un carré parfait.

(c) À l'étape 4, al-Khwārizmī effectua une autre opération arithmétique ; imitez-la en appliquant la même opération aux deux membres de votre dernière équation.

(d) Notez que cette dernière étape a ramené la résolution de l'équation du second degré à celle de *deux* équations linéaires. Complétez votre processus de résolution en exécutant les étapes 5 et 6 indiquées par al-Khwārizmī sur l'une des équations linéaires obtenues en (c). Faites de même pour l'autre équation.

(e) Al-Khwārizmī n'a reconnu qu'un seul des nombres que vous avez trouvés en (d) comme solution de son problème. Pourquoi n'a-t-il pas considéré l'autre comme solution également ?

(f) Pour al-Khwārizmī, l'équation originale comprenait à la fois la « racine » (qui est la « chose ») et son « carré » ; l'étape 7 est nécessaire pour rapporter la valeur de ce dernier. Quelles sont les deux valeurs du carré de l'inconnue ?

4 La démonstration : compléter le carré

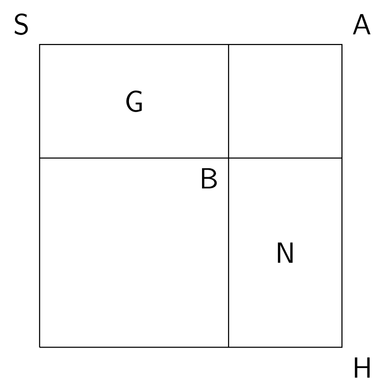
Malgré l'analyse soigneuse d'al-Khwārizmī dans l'extrait ci-dessus, quelque chose dans sa méthode de résolution des équations du second degré reste légèrement insatisfaisant. Dans les solutions qu'il a présentées pour « racines et carrés sont égaux à nombres », il a commencé par diviser par deux le nombre des racines, multiplier cette quantité par elle-même, puis ajouter cette quantité au « nombre simple » de l'équation. Cela correspond aux étapes 2 et 3 de la solution qu'il a présentée ci-dessus (p. 5). Bien que le calcul de ce nombre soit une étape critique dans la résolution du problème, c'est un choix arithmétique étrange à ce stade. Comment al-Khwārizmī savait-il que l'ajout du carré de la moitié du nombre des racines était précisément ce qu'il fallait pour résoudre le problème ?

Nous entrevoyons la raison de cela en examinant la justification de sa solution par al-Khwārizmī. En tant que mathématicien bien formé, il savait qu'une démonstration déductive, à la manière des géomètres grecs de l'Antiquité comme Euclide (v. 325–265 av. J.-C.) et Archimède (287–212 av. J.-C.), convaincrait ses lecteurs de la solidité et de l'inattaquabilité des méthodes qu'il proposait.

Démonstration du cas « un Carré et dix Racines sont égaux à trente-neuf *Dirhams* » : la figure pour expliquer ceci est un quadrilatère,[9] dont les côtés sont inconnus. Il représente le carré dont vous souhaitez connaître la valeur ou la racine...

Nous partons du quadrilatère AB, qui représente le carré. Notre prochaine tâche est d'y ajouter les dix racines du même. Nous divisons à cet effet le dix par deux, ce qui donne cinq, et construisons deux rectangles sur deux côtés du quadrilatère AB, à savoir G et N, dont la longueur est chacun de cinq, comme la moitié[10] des dix racines, tandis que la largeur de chacun est égale à un côté du quadrilatère AB. Un quadrilatère reste alors à l'opposé du coin du quadrilatère AB. Celui-ci est égal à cinq multiplié par cinq, ce cinq étant la moitié du nombre des racines que nous avons ajouté à chacun des deux côtés du premier quadrilatère.

Nous savons ainsi que le premier quadrilatère, qui est le carré, et les deux rectangles sur ses côtés, qui sont les dix racines, font ensemble trente-neuf. Pour compléter le grand quadrilatère, il ne manque qu'un carré de cinq multiplié par cinq, soit vingt-cinq. Nous l'ajoutons à trente-neuf pour compléter le grand carré SH. La somme est soixante-quatre. Nous en extrayons la racine, huit, qui est l'un des côtés du grand quadrilatère. En soustrayant de cela la même quantité que nous avons ajoutée auparavant, à savoir cinq, nous obtenons trois comme reste. C'est le côté du quadrilatère AB, qui représente le carré ; c'est la racine de ce carré, et le carré lui-même est neuf. Voici la figure :



Dans les tâches du projet suivantes, nous examinerons de plus près la démonstration géométrique d'al-Khwārizmī et son lien avec son algorithme numérique.

9. « Quadrilatère » est ici utilisé par Frederic Rosen dans sa traduction du XIX^{e}siècle [al Khwārizmī, 1831] de l'*Algèbre* pour désigner un carré ou une figure rectangulaire. Son usage est ici commode, car si l'on utilisait le mot plus courant « carré » à la place, on risquerait de confondre si ce mot désigne la forme géométrique — ce qui est l'intention ici — ou un type de nombre qui est le produit d'un nombre par lui-même — ce que la forme est censée représenter, comme al-Khwārizmī le mentionne par la suite. En passant, je note que si la traduction ici est celle de Rosen, le diagramme présenté dans cet extrait est tiré d'une autre traduction de l'*Algèbre* [Rāshid, 2009].

10. Ce mot signifie simplement « milieu » ou « moitié », apparenté au mot français *moitié*.

Tâche 5 (a) Dessinez une copie du diagramme du carré qui accompagne la Démonstration d'al-Khwārizmī. Dénotez par C et D les deux autres coins du « quadrilatère AB », C étant celui sur le segment AS et D celui sur le segment AH. Dénotez par E le quatrième coin non étiqueté du « grand quadrilatère SH ». D'après l'explication donnée dans le texte accompagnant le problème « un carré et dix racines sont égaux à trente-neuf *dirhams* », identifiez sur votre diagramme les valeurs numériques des longueurs de ces segments :

(i) AC
(ii) AD
(iii) CS
(iv) DH
(v) AS

(b) Identifiez également les valeurs numériques des aires de ces régions dans votre diagramme :

(i) quadrilatère AB
(ii) rectangle G
(iii) rectangle N
(iv) quadrilatère SH
(v) quadrilatère BE

(c) Quels éléments du diagramme ci-dessus correspondent respectivement au « carré », aux « racines » et au « nombre simple » de « *dirhams* » dans le problème original ? Lequel correspond à la « chose », que nous représenterions par x ?

Tâche 6 Considérons un autre problème qu'al-Khwārizmī a résolu dans l'*Algèbre* : « un carré et cinq racines du même sont égaux à vingt-quatre *dirhams* ». Dessinez un diagramme similaire à celui ci-dessus pour ce problème. Quel segment ou quelle région dans votre diagramme correspond à la « chose » de la solution ? Lequel est le « carré » ? les « cinq racines » ? les « vingt-quatre *dirhams* » ?

Tâche 7 (a) Qu'entendait al-Khwārizmī quand il disait dans la section d'ouverture du texte ci-dessus que le « quadrilatère AB, dont les côtés sont inconnus, ...représente le carré » ?

(b) Pourquoi est-il géométriquement nécessaire de « diviser par deux à cet effet » le nombre de « racines » de l'équation ?

(c) Pourquoi cette méthode de résolution des équations du second degré est-elle connue aujourd'hui sous le nom de *compléter le carré* ?

(d) Aujourd'hui, nous appelons la forme d'équation unique

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(et toute équation spécifique obtenue en donnant des valeurs particulières aux trois coefficients [11]) une *équation du second degré*. Recherchez l'étymologie du mot *quadratique* ; pourquoi est-ce un terme approprié pour décrire de telles équations ?

11. Cela inclut la possibilité que b ou c soit nul, que al-Khwārizmī avait reléguées aux cas « carrés égaux à racines » et « carrés égaux à nombres ».

Tâche 8 Dessinez un diagramme similaire à celui présenté par al-Khwārizmī ci-dessus pour accompagner l'équation du second degré $x^2 + 14x = 32$. Au lieu d'étiqueter le diagramme avec des lettres pour les points ou les régions, étiquetez les éléments du diagramme qui correspondent aux quantités $x, x^2, 14$ et 32 qui apparaissent dans l'équation. Montrez comment cela aide à illustrer le processus de complétion du carré qui résout l'équation.

5 Conclusion

La forme générale de l'espèce « racines et carrés sont égaux à nombres » analysée ci-dessus par al-Khwārizmī est représentable en notation moderne par la forme

$$ax^2 + bx = c.$$

Dans cette représentation, les coefficients a, b, c, qui représentent normalement des nombres particuliers — dans l'exemple prototypique antérieur d'al-Khwārizmī, $a = 1, b = 10, c = 39$ — sont également appelés *paramètres*. Le terme « paramètre » sert à souligner qu'un niveau de généralité plus élevé est appliqué, où les quantités a, b, c sont considérées comme fixes mais non spécifiées. Cela contraste avec la manière dont la quantité *inconnue* x est traitée. Car si x est également non spécifié dans le problème, il ne peut pas être librement choisi par le résolveur, puisqu'il est soumis aux conditions de l'équation. En effet, ces conditions sont en partie établies par le choix des paramètres qui apparaissent dans l'équation. L'inconnue x est contrainte par ces conditions et doit en être déduite.

Il peut surprendre le lecteur que l'utilisation de symboles, comme les lettres $a, b, c, \ldots, x, y, z$ pour les quantités et $+, -, =$, etc., pour les opérations et relations arithmétiques, est totalement absente des écrits du « Père de l'algèbre ». En effet, le symbolisme n'entra dans les procédures algébriques que 700 ans après la publication de son *Algèbre* ! Pour la sensibilité moderne, l'utilisation du symbolisme est devenue une partie intégrante de la pratique de la résolution de problèmes algébriques. Al-Khwārizmī, lui, était capable de communiquer précisément les mêmes opérations et relations entièrement en mots ; nous appelons cela l'*algèbre rhétorique* pour la distinguer de notre *algèbre symbolique*, aujourd'hui plus familière.

En plus de l'absence de notation symbolique, al-Khwārizmī était influencé par la conception des nombres qui prévalait à son époque. Comme nous l'avons déjà vu, il était amené à classer toutes les équations du second degré en cinq types :

— carrés égaux à racines ;

— carrés égaux à nombres ;

— carrés et racines égaux à nombres ;

— carrés et nombres égaux à racines ;

— carrés égaux à racines et nombres.

La pratique algébrique contemporaine se contente d'un seul type, à savoir

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Cette remarquable efficacité est rendue possible parce que le concept moderne de nombre permet aux coefficients de l'équation de ne pas être nécessairement positifs, mais peuvent prendre la valeur 0 (à l'exception de a qui ne peut être 0, sinon l'équation se réduit à une équation linéaire), voire même une valeur négative.

Malgré les changements apportés aux mathématiques depuis son époque, la méthode de complétion du carré d'al-Khwārizmī est encore aujourd'hui la clé de la *dérivation* de la célèbre *formule quadratique*,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{\dagger}$$

comme l'indique l'Annexe A ci-dessous. Mais si cette formule peut s'appliquer à toute équation du second degré possible, le contexte d'un problème qui donne lieu à l'équation restreint parfois encore aujourd'hui le type de nombre acceptable comme solution. Il n'est pas surprenant qu'al-Khwārizmī, le « Père de l'algèbre », ait réalisé que compléter le carré ne produirait pas, au sens pratique, une solution pour toute équation du second degré que l'on pourrait formuler. L'Annexe B de ce projet explore la manière dont le traitement de cette question par al-Khwārizmī dans l'*Algèbre*, il y a plus de 1000 ans, est lié à une restriction similaire sur notre utilisation de la formule quadratique aujourd'hui.

Références

Muḥammad ibn Mūsā al Khwārizmī. *The Algebra of Mohammed ben Musa, Translated and Edited by Frederic Rosen.* Oriental Translation Fund, London, 1831.

J. L. Berggren. *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam.* Springer, New York, NY, 2003.

Victor Katz. *A History of Mathematics : An Introduction.* Addison Wesley, Reading, MA, second edition, 1998.

Victor Katz, Annette Imhausen, Eleanor Robson, Joseph W. Dauben, Kim Plofker, and J. Lennart Berggren, editors. *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam : A Sourcebook.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007.

Victor J. Katz and Karen Hunger Parshall. *Taming the Unknown : A History of Algebra from Antiquity to the Early Twentieth Century.* Princeton University Press, Princeton, NJ, and Oxford, 2014.

David C. Lindberg. *The Beginnings of Western Science : The European Tradition in Philosophical, Religious, and Institutional Context, Prehistory to A.D. 1450.* University of Chicago Press, Chicago and London, 1992.

Rushdī Rāshid. *Al-Khwarizmi : The Beginnings of Algebra.* Saqi, London, 2009.

George Saliba. *Islamic Science and the Making of the European Renaissance.* MIT Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England, 2007.

Annexe A : La formule quadratique

Dans la tâche présentée dans cette annexe, vous appliquerez une méthode similaire à la solution formulaire d'al-Khwārizmī de la forme « carrés plus racines sont égaux à nombres » pour développer la formule quadratique standard pour la solution de la forme symbolique générale de l'équation du second degré,

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

en laissant les paramètres non spécifiés.

Tâche A Soient a, b et c les coefficients de l'équation symbolique générale du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

(a) Commencez par amener l'équation à la forme de l'espèce « carrés et racines sont égaux à nombres ». Réduisez-la davantage en divisant l'équation par le coefficient de x^2.

(b) Ensuite, divisez par deux le nombre des racines dans la nouvelle équation, multipliez le résultat par lui-même, et ajoutez ce carré aux deux membres de la dernière équation. Cette étape garantit qu'il y a une expression trinôme d'un côté de l'équation qui se factorise comme un carré parfait ; factorisez le trinôme en tant que carré parfait. De l'autre côté de l'équation se trouve un certain nombre.

(c) Prenez maintenant les racines carrées des deux membres de l'équation. Cela devrait produire deux nouvelles équations, toutes deux linéaires, ne dépendant que du choix de l'une des deux racines carrées du nombre pour l'équation. Dans chaque équation, résolvez pour x. Vous devriez obtenir quelque chose d'équivalent à :

$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)} - \frac{b}{2a}. \tag{‡}$$

(d) Enfin, « rationalisez » l'expression en exprimant toutes les fractions avec un dénominateur commun. Montrez que le résultat produit la célèbre *formule quadratique* :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{†}$$

Annexe B : Racines complexes

Al-Khwārizmī croyait que les seules racines valides pour résoudre une équation du second degré étaient des nombres positifs, car pour lui, tous les problèmes découlaient de problèmes réels dont la « chose » à résoudre était une quantité mesurable. Il était cependant assez perspicace pour identifier la situation problématique dans laquelle cela pourrait ne pas être possible. Voici un commentaire qu'il formula au milieu de son traitement du cas « carrés et nombres sont égaux à racines » :

> Et sachez que, lorsque dans une question appartenant à ce cas vous avez divisé par deux le nombre des racines et multiplié la moitié par elle-même, si le produit est inférieur au nombre de *dirhams* relié au carré, alors l'instance est impossible ; mais si le produit est égal aux *dirhams* par eux-mêmes, alors la racine du carré est égale à la moitié des racines seule, sans addition ni soustraction.

Tâche B

(i) Comme nous l'avons vu, la formule quadratique (†) prétend produire les solutions de toute équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$. Considérant comment al-Khwārizmī a formulé son cas problématique « carrés et nombres sont égaux à racines », pourquoi serait-il, comme il l'a indiqué ci-dessus, que si « le produit [de la moitié du nombre des racines par elle-même] est inférieur au nombre de *dirhams* relié au carré », alors la solution du problème serait « impossible » ? Essayez de trouver des valeurs de a, b et c satisfaisant cette condition, puis utilisez la formule quadratique pour trouver une solution.

(ii) Que voulait dire al-Khwārizmī par l'énoncé formulé à la fin de cet extrait, à savoir que « si le produit est égal aux dirhams par eux-mêmes, alors la racine du carré est égale à la moitié des racines seule, sans addition ni soustraction » ?

Notes pour les enseignants

Contenu du projet de source primaire : thèmes et objectifs

Ce mini-Projet de Source Primaire (mini-PSP) est conçu pour servir les étudiants qui apprennent les méthodes algébriques de résolution des équations du second degré, sujet présent dans la plupart des cours d'algèbre au secondaire et au cégep.

Il sera également utile aux futurs enseignants de mathématiques au secondaire qui devront enseigner l'algèbre dans leurs propres classes, ainsi qu'aux enseignants de cours d'algèbre supérieure souhaitant transmettre un aperçu de la première histoire de la théorie des équations. De plus, il convient à une utilisation dans un cours d'histoire générale des mathématiques comme introduction au rôle des mathématiques de l'ère islamique médiévale dans le développement de l'algèbre en tant que branche majeure des mathématiques.

L'objectif principal de ce projet est simple : donner à l'étudiant une compréhension approfondie de la méthode de complétion du carré, la procédure universelle pour résoudre les équations du second degré. Dans deux annexes, les étudiants pourront approfondir ces idées à travers (1) une dérivation de la formule quadratique, et/ou (2) une réflexion sur les cas où une équation du second degré produit des racines complexes.

Prérequis des étudiants

Pratiquement aucun prérequis particulier n'est exigé des étudiants pour ce PSP au-delà de ce qu'une personne étudiante au secondaire typique sait sur la résolution d'équations algébriques. En fait, le projet peut n'enseigner à l'étudiant aucune technique mathématique au-delà de ce qu'il apporte déjà au projet. Son but est de transmettre une compréhension conceptuelle plutôt que procédurale.

Conception du PSP et commentaires sur les tâches

1 Introduction : Le projet s'ouvre sur une brève section qui informe l'étudiant sur les objectifs du PSP.

2 Les racines de l'algèbre : Nous présentons Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (v. 780–850 APR. J.-C.), généralement considéré comme le « Père de l'algèbre », auteur d'une œuvre immensément influente, *al-Kitāb al-mukhtaṣar fī hisāb al-jabr wal-muqābala* (*Le livre abrégé sur le calcul par la restauration et la réduction*), rédigé vers l'an 825, probablement à Bagdad. Cette influence s'est étendue non seulement au sein de la culture arabo-islamique, mais a été très importante pour préparer les érudits européens à réaliser des avancées en algèbre et en résolution de problèmes entre les XII^e^et XVI^e^siècles. C'est de cette œuvre que le projet tire tous ses textes sources, en utilisant deux traductions anglaises : l'une du XIX^e^siècle [al Khwārizmī, 1831] par l'orientaliste Frederic Rosen, et l'autre produite par l'éminent historien des sciences égyptien Roshdi Rashed (ou Rushdī Rāshid) [Rāshid, 2009].

Nous nous tournons vers le début de l'*Algèbre*, où al-Khwārizmī classifiait les types de problèmes que l'algèbre était alors capable de résoudre, à savoir les équations du second degré. Il fit cela en définissant « trois classes » de nombre (« carrés », « racines » et « nombres simples »), ce que nous appellerions aujourd'hui des termes monomiaux dans une expression polynomiale du second degré. Les étudiants constatent que, si la terminologie est étrangère, les mathématiques d'al-Khwārizmī leur sont familières. Dans la Tâche 1, ils traduisent les différentes classes d'équations qu'il propose en forme symbolique caractéristique de l'algèbre actuelle.

3 Résoudre une équation du second degré : La Tâche 4 invite les étudiants à utiliser les numéros encerclés insérés dans le texte source comme repères pour les aider à analyser le texte d'al-Khwārizmī. Les étudiants travaillent à travers l'une de ses solutions d'équation du second degré, traitée par le procédé que nous appelons maintenant « compléter le carré ».

4 La démonstration : compléter le carré : Les étudiants lisent la démonstration géométrique d'al-Khwārizmī de sa méthode qui — littéralement ! — complétait un carré, illustrant le fonctionnement de la procédure algébrique correspondante.

5 Conclusion : Dans cette section finale, l'attention de l'étudiant est attirée sur le fait (désormais assez évident) que le texte d'al-Khwārizmī n'inclut pas un seul x, ni même un signe d'égalité ! Une discussion sur la puissance du processus systématique et analytique qu'al-Khwārizmī, le Père de l'algèbre, utilisait pour résoudre les équations du second degré conduit à la formulation de la formule quadratique et conclut le projet.

Annexe A : La formule quadratique : Dans cette suite optionnelle, la méthode de complétion du carré d'al-Khwārizmī est utilisée pour dériver la formule quadratique. Aucun texte source n'est utilisé, car la procédure est traitée en utilisant le symbolisme moderne.

Annexe B : Racines complexes : La formule quadratique peut être utilisée pour produire des racines complexes pour certaines équations du second degré. Étant donné la compréhension des nombres d'al-Khwārizmī, pas assez large pour accepter la possibilité que les racines complexes soient valides, il identifiait de telles équations comme « impossibles ». Mais il était suffisamment perspicace pour comprendre exactement quand de telles équations pourraient survenir. Cette annexe demande aux étudiants de comprendre les conditions d'al-Khwārizmī pour déterminer quand une équation était « impossible ».

Appendice A : La formule quadratique : Dans cette suite optionnelle, al-Khwārizmī's method of completing the square is used to derive the quadratic formula. But no source text is employed, as the procedure is handled using modern symbolism.

Suggestions pour la mise en œuvre en classe

Les enseignants qui souhaitent utiliser ce projet en classe sont vivement invités à travailler eux-mêmes les tâches du projet avant de les confier aux étudiants ! Beaucoup de tâches ne sont pas des exercices routiniers et peuvent poser des défis, même à ceux qui maîtrisent bien l'algèbre.

Le projet est destiné à être complété en deux périodes de cours de 50 minutes, plus du temps en amont pour que les étudiants effectuent une première lecture, et du temps en aval pour qu'ils rédigent leurs solutions aux Tâches. Une période supplémentaire pourra être nécessaire pour inclure l'une ou les deux Annexes dans les discussions en classe.

Le nombre effectif de périodes de cours consacrées à chaque section dépend naturellement des objectifs de l'enseignant et de la part du PSP mise en œuvre avec les étudiants. Les estimations de temps proches d'une semaine complète de cours supposent que la majeure partie du travail du PSP est effectuée par les étudiants travaillant en petits groupes en classe, avec moins de travail laissé à l'extérieur de la classe.

Exemple de calendrier de mise en œuvre (basé sur une période de cours de 50 minutes)

Les enseignants qui mettent en œuvre ce projet doivent s'assurer que leurs étudiants se concentrent sur les Tâches 1, 4 et 5, où se situe l'essentiel du travail. Les étudiants doivent se préparer pour le cours en lisant le début du projet jusqu'à la Tâche 1, en rédigeant la Tâche 1 et en apportant leur travail en classe afin que la discussion puisse y commencer dès le début du cours. La Tâche 2 peut être traitée lors d'une brève discussion avec toute la classe avant que les étudiants ne participent à une lecture commune de la Section 3, ponctuée d'un bref travail individuel et silencieux sur les Tâches 3 et 4 lorsqu'elles sont rencontrées, suivi d'un travail en petits groupes pour discuter des résultats obtenus. Les étudiants pourraient avoir besoin de compléter la rédaction de la Tâche 4 en devoir.

Lors du deuxième jour, la priorité est donnée à la Tâche 5 et au lien entre la procédure de complétion du carré et la version géométrique qui constitue la démonstration d'al-Khwārizmī. Pour préparer ce travail, les étudiants pourraient être invités à lire l'extrait de source à la page 7 avant la réunion de classe. Les deux premières parties de la Tâche 7 peuvent également être faites en classe, laissant les Tâches 6, 7(c) et (d), et 8 en devoir.

Les enseignants qui donnent des cours de 75 minutes pourront peut-être faire travailler les étudiants sur l'une des deux Annexes à la fin de la deuxième période. Ceux qui font des cours de 50 minutes auraient besoin d'une troisième réunion pour cela ; alternativement, les tâches de cette section pourraient être données en devoir, en particulier avec des étudiants plus avancés. Notez que la seconde Annexe suppose la connaissance de la formule quadratique, dont la dérivation fait l'objet de la première Annexe. Il n'est toutefois pas nécessaire de compléter la première Annexe pour aborder le contenu de la seconde.

Modifications possibles du projet

Le code LaTeX de l'ensemble de ce PSP est disponible auprès de l'auteur sur demande pour faciliter la préparation de guides de préparation avancée / de lecture ou de « feuilles de travail en classe » basées sur les tâches incluses dans le projet. Le PSP lui-même peut également être modifié par les enseignants selon leurs besoins pour mieux correspondre à leurs objectifs pour le cours.

Liens avec d'autres projets de sources primaires

Ce projet permet certains liens avec d'autres Projets de Sources Primaires, tous disponibles gratuitement sur le site du projet TRIUMPHS (*Transforming Instruction in Undergraduate Mathematics via Primary Historical Sources*) :

— Ce projet est une version réduite d'un PSP antérieur du même auteur, *Solving Equations and Completing the Square : From the Roots of Algebra*. La version plus longue est conçue pour une mise en œuvre en classe sur une semaine complète ; elle comprend davantage du texte source de l'*Algèbre* d'al-Khwārizmī et une présentation plus approfondie du contenu ci-dessus, avec une attention particulière à une comparaison de l'algèbre rhétorique d'al-Khwārizmī avec les méthodes symboliques modernes.

— Le PSP intitulé *The Pythagorean Theorem and the Exigency of the Parallel Postulate*, par Jerry Lodder, présente une démonstration complète du théorème de Pythagore telle que donnée par Euclide dans le Livre I de ses *Éléments*, en portant une attention particulière à la dépendance de l'argumentation vis-à-vis du célèbre Postulat des parallèles. Les étudiants souhaitant approfondir la nature des démonstrations géométriques, similaires à celle présentée par al-Khwārizmī à la fin du présent projet, pourraient être intéressés par cette incursion dans la géométrie plane.

— Les étudiants intéressés par d'autres traitements de l'algèbre sans symbolisme pourraient trouver ce PSP agréable : *Solving Systems of Linear Equations Using Ancient Chinese Methods*, par Mary Flagg. Ce projet est également idéal pour les étudiants désireux d'étudier d'autres œuvres mathématiques non occidentales.

Recommandations de lectures complémentaires

L'histoire des mathématiques du monde islamique médiéval est fascinante, notamment en ce qui concerne l'explosion de l'activité à l'époque d'al-Khwārizmī grâce à la traduction d'œuvres scientifiques des civilisations environnantes, et la manière dont elle a influencé les développements ultérieurs des mathématiques, en particulier à l'époque de la Renaissance européenne. Le chapitre 9 de [Lindberg, 1992] et le chapitre 7 de [Katz and Parshall, 2014] racontent assez bien cette histoire. Ce dernier livre mérite d'être étudié dans son intégralité pour apprendre toute l'étendue de l'histoire du développement de l'algèbre depuis l'Antiquité jusqu'à l'époque moderne.

Remerciements

Ce projet a été conçu et rédigé alors que l'auteur était Visiting Fellow en histoire des mathématiques à l'Université de St. Andrews, une bourse soutenue en partie par une subvention de la Edinburgh Mathematical Society. L'auteur reconnaît avec gratitude ce soutien, avec des remerciements particuliers à la Professeure Isobel Falconer de l'École de Mathématiques et de Statistiques de l'Université de St. Andrews.

Remerciements particuliers à Silence Lumen, Mary Flagg, David Pengelley, Kathy Clark et Beverly Wood, qui ont apporté une aide précieuse pour une première version de ce projet, ainsi qu'à Dominic Klyve et Janet Barnett, qui ont contribué avec des suggestions pour la production de cette « mini-version » du projet original.

Le développement de ce projet a été partiellement soutenu par le projet TRIUMPHS (*Transforming Instruction in Undergraduate Mathematics via Primary Historical Sources*) grâce au financement du programme *Improving Undergraduate STEM Education* de la National Science Foundation sous les subventions n° 1523494, 1523561, 1523747, 1523753, 1523898, 1524065 et 1524098. Les opinions, résultats, conclusions ou recommandations exprimés dans ce projet sont ceux de l'auteur et ne reflètent pas nécessairement les points de vue de la National Science Foundation.

Pour plus d'informations sur TRIUMPHS, visitez `https://blogs.ursinus.edu/triumphs/`.