Investigations sur la définition de la limite par d'Alembert

(Version Analyse Réelle)

David Ruch *

22 novembre 2021

1 Introduction

La définition moderne de la limite a évolué sur plusieurs décennies. L'une des premières tentatives de définition précise est attribuée à Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717–1783), mathématicien, philosophe et physicien français. [1] Parmi ses nombreuses réalisations, d'Alembert fut co-éditeur de l'*Encyclopédie*, une importante encyclopédie générale publiée en France entre 1751 et 1772. Cet ouvrage est considéré comme une réalisation significative du mouvement des Lumières en Europe.

D'Alembert défendit, dans deux articles de 1754 de l'*Encyclopédie*, l'idée que la théorie des limites devrait être placée sur des bases solides. [2] En tant que philosophe, d'Alembert était perturbé par les critiques qui signalaient des problèmes logiques liés aux limites et aux fondements du calcul. Il reconnaissait les difficultés importantes de ces critiques, écrivant dans [d'Alembert, 1754b] que

> Cette métaphysique [du calcul], sur laquelle on a tant écrit, est encore plus importante, et peut-être aussi difficile à développer que ces mêmes règles du calcul.

Dans ce projet, nous allons étudier la définition de la limite par d'Alembert et examiner les similitudes et les différences avec notre définition moderne.

2 La définition de la limite par d'Alembert

En 1754, les techniques mathématiques utilisant le calcul étaient fort avancées. D'Alembert remporta en 1747 un prix pour ses travaux sur les équations aux dérivées partielles, mais se trouva mêlé à des querelles avec Leonhard Euler (1707–1783) et d'autres sur des questions de méthodologie et de fondements. Ces disputes contribuèrent à son intérêt pour clarifier les bases des limites et de la convergence.

*Département des Sciences Mathématiques et Informatiques, Metropolitan State University of Denver, Denver, CO ; ruch@msudenver.edu

1. Les premiers chapitres de la biographie de d'Alembert ressemblent à quelque chose tiré du *Masterpiece Theater*. Il naquit de parents non mariés et fut abandonné nourrisson à l'église Saint-Jean le Rond à Paris. Sa mère, Claudine Guérin de Tencin, était une nonne fugitive qui avait fondé un célèbre *salon* parisien, rassemblement social soigneusement orchestré qui réunissait d'importants écrivains, philosophes, scientifiques, artistes et aristocrates dans un but de discussions intellectuelles et politiques. Tencin ne reconnut jamais d'Alembert comme son fils, et son père, Louis-Camus Destouches, trouva une autre femme pour élever le jeune Jean. Destouches mourut en 1726, mais laissa des fonds pour l'éducation de Jean. D'Alembert réussit bien ses études et devint actif en tant qu'adulte dans la philosophie, la littérature, la science et les mathématiques de son époque, se tenant « au cœur même des Lumières avec des intérêts et des activités touchant à chacun de ses aspects » [Hankins, 1990, p. 1].

2. Le premier de ces articles était intitulé « Limite (Mathématiques) », et le second « Calcul différentiel ».

Voici la définition de la limite par d'Alembert tirée de l'*Encyclopédie* [d'Alembert, 1754a] :

> Limite. (Mathématiques) On dit qu'une grandeur est la *limite* d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, aussi petite que l'on puisse supposer, sans pourtant que la grandeur qui s'approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle s'approche, en sorte que la différence d'une pareille quantité à la *limite* est absolument inassignable.
>
> Par exemple, supposons deux polygones, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un cercle, il est évident qu'on peut en multiplier les côtés autant que l'on voudra ; et dans ce cas, chaque polygone approchera toujours de plus en plus de la circonférence du cercle, le périmètre du polygone inscrit augmentera, et celui du polygone circonscrit diminuera ; mais le périmètre ou le contour du premier ne surpassera jamais la longueur de la circonférence, et celui du second ne sera jamais plus petit que cette même circonférence ; la circonférence du cercle est donc la *limite* de l'augmentation du premier polygone, et de la diminution du second.
>
> [. . .]
>
> À proprement parler, la *limite* ne coïncide jamais, ou n'est jamais égale à la quantité dont elle est la *limite* ; mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus, et peut en différer aussi peu qu'on voudra. Le cercle, par exemple, est la *limite* des polygones inscrits et circonscrits ; car à proprement parler il ne se confond jamais rigoureusement avec eux, quoique ceux-ci puissent s'en approcher à l'infini.

Examinons quelques exemples.

Tâche 1 Dessinez un diagramme pour un cercle de rayon 1 et un polygone régulier inscrit à $n = 8$ côtés. Utilisez quelques notions de trigonométrie de base pour trouver la longueur exacte du périmètre du polygone. À quelle distance est-il de la circonférence du cercle ?

Tâche 2 Considérer l'exemple « polygone inscrit → cercle » et la définition de limite donnés par d'Alembert.

Pour simplifier, supposer le polygone inscrit est régulier avec n côtés centrée sur le centre du cercle. Ces polygones ont comme périmètre

$$\text{périmètre} = 2n \cdot \text{rayon} \cdot \sin(\pi/n).$$

(a) Si la « grandeur donnée » est 0.1 et le cercle est de rayon 1, il faut combien de côtés au polygone inscrit pour garantir que « le second peut s'apporche du premier plus près que » la grandeur 0.1 ? La calculatrice peut être utile !

(b) Combien de côtés faut-il pour un cercle de rayon 1 et une « grandeur donnée » 0.01 ?

(c) En bonus, trouver la formule donnant le périmètre.

Notez que cette définition manque de notation mathématique moderne précise. Observez également que l'exemple du polygone et du cercle concerne la limite d'une *suite*. Voici une définition standard de la limite d'une suite issue d'un manuel de calcul différentiel :

> **Définition du calcul différentiel.** Une suite $\{a_n\}$ a la **limite** L et l'on écrit
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \to L \text{ quand } n \to \infty$$
>
> si l'on peut rendre les termes a_n aussi proches de L que l'on veut en prenant n suffisamment grand.

Si on écrit la tâche 2 en notation moderne, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} 2n \cdot r \cdot \sin(\pi/n) = 2\pi \cdot r,$$

où r est le rayon du cercle. La notation moderne utilise aussi la notation indice. Par exemple, si on pose que $p_n = 2n \cdot r \cdot \sin(\pi/n)$, on obtient la suite p_n. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 2\pi r$, on peut aussi écrire $p_n \to 2\pi r$ quand $n \to \infty$.

$\boxed{\textbf{Tâche 3}}$ Utilisez la notation moderne par indices pour une suite appropriée afin de réécrire l'exemple de la limite « polygone inscrit $\to$ cercle » de d'Alembert. Supposez pour simplifier que les polygones inscrits sont réguliers avec n côtés centrés au centre du cercle. Ces polygones ont la formule de périmètre

$$\text{périmètre} = 2n \cdot \text{rayon} \cdot \sin(\pi/n)\,.$$

En bonus, établissez la formule du périmètre, et utilisez le calcul pour confirmer cette limite. [3]

$\boxed{\textbf{Tâche 4}}$ Considérez l'exemple de la limite « polygone inscrit $\to$ cercle » de d'Alembert et sa définition. Pour la « quantité donnée » 0,1 et un cercle de rayon 1, combien de côtés faut-il au polygone inscrit pour garantir que la « seconde peut s'approcher de la première plus près que » la quantité donnée 0,1 ? La technologie sera utile ! Combien de côtés sont nécessaires pour la quantité donnée 0,01 ?

$\boxed{\textbf{Tâche 5}}$ Considérez la suite $\{a_n\}$ avec $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$.

(a) Trouvez la limite de cette suite par n'importe quel moyen.

(b) Pour la « quantité donnée » 0,01, supposons que nous voulions que a_n et sa limite « diffèrent aussi peu que » 0,01. Quelle est la valeur « suffisamment grande » de n pour garantir que a_n et sa limite diffèrent de 0,01 ou moins ?

Nous avons constaté que cette « quantité donnée » est une mesure d'une différence ou d'une tolérance admissible entre un terme de la suite a_n et la limite elle-même. Généralisons à présent un peu cet exemple en remplaçant la « quantité donnée » 0,01 par une valeur de tolérance générique ϵ.

3. Notez que cet exemple donne une façon d'approximer π. Il existe bien d'autres façons d'estimer π sans trigonométrie, notamment la méthode d'Archimède.

Tâche 6 Pour la suite $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$, soit ϵ un nombre positif arbitrairement petit. Supposons que nous voulions que a_n et sa limite diffèrent de moins de ϵ. En termes de ϵ, quelle est la valeur « suffisamment grande » de n ?

Tâche 7 Examinez attentivement la phrase de d'Alembert : « À proprement parler, la *limite* ne coïncide jamais, ou n'est jamais égale à la quantité dont elle est la limite » et notez qu'elle n'apparaît pas dans la définition du calcul de première année. Trouvez une suite convergente simple qui viole cette exigence de la définition de la limite par d'Alembert.

Tâche 8 Considérez la phrase de d'Alembert : « sans que la grandeur qui s'approche puisse jamais dépasser la grandeur dont elle s'approche » et notez qu'elle n'apparaît pas dans la définition du calcul différentiel. Trouvez une suite convergente simple qui viole cette exigence de la définition de la limite par d'Alembert.

Tâche 9 Utilisez la notation moderne pour réécrire la définition de la limite de d'Alembert pour les suites avec les quantificateurs « pour tout » et « il existe » et des inégalités. La définition du calcul de première année et un graphe de la suite $\{a_n\}$ devraient aider à démarrer. Vous devrez introduire une variable ϵ pour borner la distance entre les quantités, et une autre variable M pour mesurer que n est « suffisamment grand ». Assurez-vous d'inclure les exigences de d'Alembert selon lesquelles les termes de la suite ne peuvent ni dépasser ni coïncider avec la limite.

Comme nous l'avons vu, la définition de 1754 de la limite par d'Alembert ne s'applique pas pleinement à certains types de suites étudiés par les mathématiciens d'aujourd'hui. Il est intéressant de noter que du temps de d'Alembert, un certain débat existait sur la question de savoir si une quantité pouvait jamais atteindre ou dépasser sa limite.[4] Sur la base de votre travail avec la définition de la limite de d'Alembert, quelle pensez-vous être son opinion sur ces questions ?

Au cours du XIX$^{\text{e}}$ siècle, les mathématiciens parvinrent à un consensus selon lequel les limites pouvaient être atteintes, et qu'une suite convergente pouvait effectivement osciller autour de sa limite. Nous constatons que la définition du calcul différentiel permet ces possibilités ; cependant, elle est trop vague pour réellement construire des preuves complexes. Nous pouvons remédier à ce problème en clarifiant la logique et en convertissant certaines descriptions verbales en inégalités algébriques.

Tâche 10 Utilisez les quantificateurs « pour tout » et « il existe » et des inégalités pour réécrire la définition de la limite de premier cours de calcul pour les suites, sans les exigences supplémentaires que d'Alembert avait imposées dans sa définition. Commentez ensuite les différences entre cette définition et votre définition de la Tâche 9.

Tâche 11 Utilisez votre définition de la Tâche 10 pour prouver que la suite $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ converge.

Tâche 12 Supposons qu'une suite $\{c_n\}$ converge vers la limite 1. Utilisez votre définition de la Tâche 10 pour prouver qu'il existe un entier naturel M pour lequel $0{,}9 < c_n < 1{,}1$ dès que $n \geq M$.

4. Pour en savoir plus sur ces questions dans l'évolution du concept de limite, voir le fascinant livre de J. Grabiner [Grabiner, 2010].

3 Propriétés des limites

D'Alembert formula également deux assertions sur les propriétés des limites dans son article [d'Alembert, 1754a], et donna une preuve d'une propriété en utilisant sa définition de la limite.

> [Affirmation] 1$^{\text{re}}$. Si deux valeurs sont la *limite* de la même quantité, ces deux quantités sont égales entre elles.
>
> [Affirmation] 2$^{\text{e}}$. Supposons A $\times$ B le produit de deux grandeurs A, B. Supposons que C est la *limite* de la quantité A, et D la *limite* de la quantité B; je dis que C $\times$ D, le produit des *limites*, sera nécessairement la *limite* de A $\times$ B, le produit des deux quantités A, B.

L'une des qualités d'une bonne définition moderne est qu'elle devrait être utile pour construire des preuves des propriétés d'un concept. Étudions la première affirmation d'unicité de d'Alembert et sa preuve.

Tâche 13 Écrivez la 1$^{\text{re}}$ Affirmation de d'Alembert pour les suites en notation moderne.

Voici la preuve d'unicité de d'Alembert tirée de [d'Alembert, 1754b].

> Étant données Z et X, limites de la même quantité Y, je dis que X = Z, car s'il y avait quelque différence entre elles, telle que V, on aurait X = Z $\pm$ V. Par hypothèse, la quantité Y peut s'approcher de X aussi près que l'on veut. C'est-à-dire que la différence entre Y et X peut être aussi petite que souhaitée. Donc, puisque Z diffère de X par la quantité V, il s'ensuit que Y ne peut s'approcher de Z plus près que la quantité V, et par conséquent, que Z n'est pas la limite de Y , ce qui est contraire à l'hypothèse.

Tâche 14 Réécrivez cette preuve d'unicité en utilisant votre définition moderne de la Tâche 10.

La preuve de la 2$^{\text{e}}$ Affirmation de d'Alembert est plus difficile et d'Alembert n'en a pas fourni une dans son article.

Tâche 15 Écrivez la 2$^{\text{e}}$ Affirmation de d'Alembert pour les suites en notation moderne.

La tâche suivante étudie une preuve pour un cas particulier de la deuxième affirmation sur le produit de suites, afin de vous donner une idée des difficultés. Elle pourrait vous inspirer pour rédiger une preuve générale !

Tâche 16 Supposons que vous sachiez qu'une suite $\{a_n\}$ est à moins de 0,01 de sa limite $C = 5$ si n est supérieur à l'entier $N_1 = 47$. Supposons également que vous sachiez qu'une suite $\{b_n\}$ est à moins de 0,01 de sa limite $D = 3$ si n est supérieur à l'entier $N_2 = 92$. Déterminez jusqu'où vous devez aller avec la suite $\{a_n b_n\}$ pour vous rapprocher du produit des limites $CD = 15$. Quelle petite différence entre $a_n b_n$ et CD pouvez-vous **garantir** en allant suffisamment loin ?

Tâche 17 Utilisez les idées de la tâche précédente pour prouver la 2^e^ Affirmation de d'Alembert.

4 Conclusion

Les historiens ont noté que les définitions de la limite étaient données verbalement par les mathématiciens des XVII^e^ et XVIII^e^ siècles. Cependant, pour rendre ces idées utiles dans des preuves rigoureuses, il est important de traduire la définition verbale de la limite en une définition avec une logique claire et un langage algébrique, comme vous l'avez accompli dans la Tâche 10. Le mathématicien Augustin-Louis Cauchy (1789–1867) est généralement crédité d'être le premier à avoir fait cela, utilisant ϵ et des inégalités précises dans certaines de ses preuves. Néanmoins, sa définition de la limite était verbale et similaire à celle de d'Alembert, à ceci près que pour Cauchy les limites pouvaient être atteintes et dépassées, comme dans la définition moderne. La définition moderne de la limite que nous voyons aujourd'hui a finalement mûri dans les travaux de Karl Weierstrass (1815–1897) et ses élèves.

Quelle a été l'influence de la définition de la limite par d'Alembert ? C'est difficile à dire, car d'Alembert n'a utilisé sa définition que pour réaliser une seule preuve. Certes, son plaidoyer pour une définition précise de la limite a pu influencer des mathématiciens tels que Cauchy, et peut donc être considéré comme une contribution méritoire à l'évolution de la définition rigoureuse de la limite que nous utilisons aujourd'hui.

Références

Jean le Rond d'Alembert. Limite (Mathématiques) [Limit (Mathematics)]. In *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, volume 9, page 542. Chez Braisson, David, Le Breton and Durand, Paris, 1754a. English translation by J. Stedall in [Stedall, 2008, pp. 297–298].

Jean le Rond d'Alembert. Calcul différentiel (Differential Calculus). In *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, volume 9, pages 985–988. Chez Braisson, David, Le Breton and Durand, Paris, 1754b. English translation by G. Bringman (2003) in *The Encyclopedia of Diderot & d'Alembert Collaborative Translation Project*, Ann Arbor : Michigan Publishing, University of Michigan Library. `http://hdl.handle.net/2027/spo.did2222.0001.091`.

Judith Grabiner. The Calculus as Algebra. In *A Historian Looks Back*, pages 1–124. Mathematical Assocation of America, Washington DC, 2010.

Thomas L. Hankins. *Jean d'Alembert : Science and the Enlightenment.* Gordon and Breach, New York, 1990.

J. Stedall. *Mathematics Emerging : A Sourcebook 1540–1900.* Oxford University Press, Oxford, 2008.

Notes à l'intention des enseignants

Contenu du PSP : Thèmes et objectifs

Ce Projet de Source Primaire (PSP) est conçu pour étudier la définition de la limite pour les suites, en commençant par la définition de d'Alembert et une définition issue d'un manuel de calcul introductif moderne. Les similitudes et les différences sont explorées.

Deux versions de ce projet sont disponibles, pour des publics très différents.

- Une version est destinée aux étudiants en Analyse Réelle. **C'est la version que vous êtes en train de lire.** La définition de d'Alembert est entièrement verbale, et les tâches de la Section 2 guident les étudiants à travers des exemples et une traduction de cette définition vers une définition avec notation moderne et quantificateurs. Les étudiants sont invités à trouver des exemples illustrant la différence entre les définitions moderne et celle de d'Alembert. La Section 3 étudie deux propriétés de limite énoncées par d'Alembert, incluant des preuves modernes de ces propriétés. Quelques remarques historiques sont données dans une section de conclusion.
- Une version plus courte de ce mini-PSP est destinée aux étudiants de Calcul 2 étudiant les suites. La Section 3 sur les propriétés des limites et certaines des tâches plus techniques de la Section 2 sont omises de cette version.

Les objectifs de contenu spécifiques de cette version du projet sont les suivants.

1. Développer une définition moderne de la limite avec des quantificateurs pour les suites, basée sur la définition de d'Alembert et une définition issue d'un manuel de calcul introductif.
2. Analyser les subtilités des définitions de la limite : si les termes de la suite peuvent dépasser ou coïncider avec la limite.
3. Développer la maîtrise de la définition moderne de la limite en l'utilisant pour prouver qu'une suite donnée converge.
4. Les étudiants analysent également la propriété d'unicité des limites et explorent la limite d'un *produit* de suites convergentes. Une dernière tâche demande une preuve générale de la limite d'un *produit* de suites convergentes.

Prérequis des étudiants

Ce projet est écrit pour un cours d'Analyse Réelle avec l'hypothèse que les étudiants sont quelque peu à l'aise avec les quantificateurs, mais aucun autre bagage n'est supposé. L'auteur a utilisé ce PSP dès le premier jour du cours.

Conception du PSP et commentaires sur les tâches

Le PSP est conçu pour être utilisé largement à la place d'une section de manuel présentant la définition de la limite pour les suites. Les différences entre la définition de d'Alembert et la définition moderne peuvent aider les étudiants à réaliser les subtilités et la précision de la définition moderne.

La définition de d'Alembert est entièrement verbale, et les tâches de la Section 2 guident les étudiants à travers des exemples et une traduction de cette définition vers une définition avec notation moderne et quantificateurs. Les étudiants sont invités à trouver des exemples illustrant la différence entre les définitions moderne et celle de d'Alembert. La Section 3 étudie deux propriétés de limite énoncées par d'Alembert, incluant des preuves modernes de ces propriétés. Quelques remarques historiques sont données dans une section de conclusion.

Les enseignants pourraient vouloir utiliser la Tâche 6 pour discuter de la propriété archimédienne des nombres réels, que la plupart des étudiants considèrent comme allant de soi.

La Tâche 9 peut être difficile pour les étudiants. Les encourager à tracer un graphe et à y indiquer ϵ et M devrait aider. Des questions directrices pour les amener à réaliser que la définition doit commencer par "pour tout $\epsilon > 0$" peuvent également être utiles. Inclure les exigences de d'Alembert selon lesquelles les termes de la suite ne peuvent pas « dépasser » ni coïncider avec la limite est exigeant mais pédagogiquement utile.

Notez que la preuve d'unicité de d'Alembert, par contradiction, est différente de la plupart des preuves des manuels d'analyse traditionnels. Les étudiants pourraient avoir besoin d'aide avec les inégalités pour la Tâche 14. La Tâche 12 devrait être utile pour convertir en terminologie epsilon moderne le fait que la suite Y est supposée converger vers la limite X.

Les étudiants pourraient avoir besoin d'un indice pour la Tâche 16 sur le produit de limites, quelque chose comme $a_nb_n - 5 \cdot 3 = (a_nb_n - a_n \cdot 3) + (a_n \cdot 3 - 5 \cdot 3)$ ou une version verbale ou visuelle de cette identité. La preuve du résultat plus général dans la dernière tâche est très similaire, mais donne aux étudiants l'occasion de s'exercer à rédiger des preuves avec des epsilons.

Suggestions pour la mise en œuvre en classe

Une lecture avancée du projet et quelques travaux de tâches avant chaque cours est idéale mais pas nécessaire. Voir le calendrier indicatif ci-dessous pour des idées.

Le code LaTeX de ce mini-PSP complet est disponible auprès de l'auteur sur demande pour faciliter la préparation de guides de lecture préalables ou de « fiches de travail en classe » basées sur les tâches incluses dans le projet. Le mini-PSP lui-même peut également être modifié par les enseignants selon leur convenance pour mieux correspondre à leurs objectifs pour le cours.

Calendrier indicatif de mise en œuvre (basé sur une période de cours de 50 minutes)

Ce PSP est conçu pour prendre deux jours de cours, bien qu'un troisième jour de cours puisse être préférable si le temps le permet.

Avant le premier cours, les étudiants lisent l'extrait de d'Alembert et font les Tâches 1 à 3. Après une discussion en classe de ces tâches, les étudiants travaillent les Tâches 4 à 8 en groupes. La Tâche 8 est cruciale, donc une discussion en classe après le travail de groupe est conseillée pour s'assurer que tout le monde comprend cette tâche. Les Tâches 9 à 11 sont ensuite assignées en devoir, mais les Tâches 9 et 10 doivent être discutées au début du deuxième cours. Ensuite, les étudiants lisent les propriétés des limites de d'Alembert et sa preuve d'unicité, et travaillent les Tâches 12 et 13 en groupes. Par souci de temps, vous pourriez vouloir donner une version soignée de la preuve de la Tâche 13 en devoir. Les groupes d'étudiants travaillent ensuite les Tâches 14 et 15. Si vous n'avez que deux périodes de cours, vous pourriez vouloir leur faire terminer la Tâche 15 en devoir et réserver la Tâche 16 pour une discussion ultérieure en classe. Alternativement, le travail de groupe sur les Tâches 15 et 16 peut avoir lieu lors d'une troisième période de cours avec une version soignée de la preuve de la Tâche 16 assignée en devoir.

Liens avec d'autres Projets de Sources Primaires

Les projets supplémentaires suivants basés sur des sources primaires sont également disponibles gratuitement pour une utilisation dans un cours introductif d'analyse réelle ; le nom de l'auteur du PSP est indiqué entre parenthèses, ainsi que le sujet du projet si ce n'est pas évident à partir du titre du PSP. Les PSP plus courts pouvant être complétés en au plus 2 périodes de cours sont désignés par un astérisque (*). Les versions prêtes à l'emploi en classe des deux derniers projets répertoriés peuvent être téléchargées sur `https://digitalcommons.ursinus.edu/triumphs\_topology` ; tous les autres projets répertoriés sont disponibles sur `https://digitalcommons.ursinus.edu/triumphs\_analysis`.

- *Why be so Critical ? 19th Century Mathematics and the Origins of Analysis** (Janet Heine Barnett)
- *Investigations into Bolzano's Bounded Set Theorem* (David Ruch)
- *Stitching Dedekind Cuts to Construct the Real Numbers* (Michael Saclolo)
  Convient également à un cours d'introduction aux preuves.
- *Bolzano on Continuity and the Intermediate Value Theorem* (David Ruch)
- *An Introduction to a Rigorous Definition of Derivative* (David Ruch)
- *Rigorous Debates over Debatable Rigor : Monster Functions in Real* (Janet Heine Barnett ; propriétés des dérivées, propriété des valeurs intermédiaires)
- *The Mean Value Theorem* (David Ruch)
- *The Definite Integrals of Cauchy and Riemann* (David Ruch)
- *Henri Lebesgue and the Development of the Integral Concept** (Janet Heine Barnett)
- *Euler's Rediscovery of e** (David Ruch ; convergence de suites, expressions en séries et en suites pour e)
- *Abel and Cauchy on a Rigorous Approach to Infinite Series* (David Ruch)
- *The Cantor set before Cantor** (Nicholas A. Scoville)
  Convient également à un cours de topologie.
- *Topology from Analysis** (Nicholas A. Scoville)
  Convient également à un cours de topologie.

Remerciements

Le développement de ce projet étudiant a été partiellement soutenu par le programme TRansforming Instruction in Undergraduate Mathematics via Primary Historical Sources (TRIUMPHS) avec le financement du programme Improving Undergraduate STEM Education de la National Science Foundation sous les numéros de subvention 1523494, 1523561, 1523747, 1523753, 1523898, 1524065 et 1524098. Les opinions, conclusions et recommandations exprimées dans ce projet sont celles de l'auteur et ne représentent pas nécessairement les vues de la National Science Foundation.

Pour plus d'informations sur TRIUMPHS, visitez `https://blogs.ursinus.edu/triumphs/`.