Construction des nombres figurés

Jerry Lodder*

17 avril 2026

1 Nicomaque de Gérase

Notre première lecture est tirée du texte grec ancien *Introduction à l'Arithmétique* [4, 5] écrit par Nicomaque de Gérase, probablement vers la fin du premier siècle de notre ère. Bien que l'on sache peu de choses sur Nicomaque, son *Introduction à l'Arithmétique* fut traduite en arabe et en latin et servit de manuel jusqu'au XVIe siècle [2, p. 176] [7]. Le Livre Premier de Nicomaque traite des propriétés des nombres pairs et impairs et propose un schéma de classification pour les rapports de nombres entiers. Notre extrait, cependant, est tiré du Livre Second, qui traite du dénombrement des points (ou alpha) dans certaines figures de forme régulière, telles que les triangles, les carrés, les pyramides, etc. Notons qu'alpha (α) est le symbole grec ancien pour le nombre un, iota (ι) le symbole pour dix, etc. Les nombres issus de ces figures sont appelés nombres figurés et forment diverses classes, telles que les nombres triangulaires, les nombres carrés, les nombres pyramidaux, etc. Aujourd'hui, les nombres figurés trouvent des applications non seulement en arithmétique, mais aussi en algèbre, géométrie, probabilités, calcul et informatique. Beaucoup d'arguments de dénombrement peuvent se ramener à certaines propriétés combinatoires de ces nombres. Nous commençons par la série naturelle des nombres, que Nicomaque appelle aussi « nombres linéaires. »

*Sciences mathématiques ; Dept. 3MB, Case 30001 ; Université d'État du Nouveau-Mexique ; Las Cruces, NM 88003 ; jlodder@nmsu.edu.

2 La Série Naturelle des Nombres

Lisons en traduction française [4] :

Nicomaque, tiré de
Introduction à l'Arithmétique
Livre second
Chapitre VI

[...] Les sujets que nous devons d'abord examiner et observer concernent les nombres linéaires, plans et solides, [...]. [L]es germes de ces idées sont repris en arithmétique, comme la science qui est la mère de la géométrie et plus élémentaire qu'elle.

Tout d'abord, nous devons reconnaître que chaque lettre par laquelle nous désignons un nombre, comme iota, le signe pour 10, kappa pour 20, et oméga pour 800, désigne ce nombre par convention et accord humain, et non par nature. En revanche, l'indication naturelle, non artificielle et donc la plus simple des nombres serait la mise côte à côte des unités contenues dans chacun. Par exemple, l'écriture d'une unité au moyen d'un alpha sera le signe pour 1 ; deux unités côte à côte, c'est-à-dire une suite de deux alpha, sera le signe pour 2 ; quand trois sont mis en ligne ce sera le caractère pour 3, quatre en ligne pour 4, cinq pour 5, et ainsi de suite. Car par une telle notation et indication seulement pourrait la disposition schématique des nombres plans et solides mentionnés être rendue claire et évidente, ainsi :

Le nombre 1, α
Le nombre 2, $\alpha \quad \alpha$
Le nombre 3, $\alpha \quad \alpha \quad \alpha$
Le nombre 4, $\alpha \quad \alpha \quad \alpha \quad \alpha$
Le nombre 5, $\alpha \quad \alpha \quad \alpha \quad \alpha \quad \alpha$

et ainsi de suite de façon similaire.

L'unité, occupant alors la place et le rôle d'un point, sera le commencement des intervalles et des nombres, mais n'est pas elle-même un intervalle ou un nombre, tout comme le point est le commencement d'une ligne, ou d'un intervalle, mais n'est pas lui-même ligne ou intervalle. [...]

La première dimension est appelée « ligne », car « ligne » est ce qui est étendu dans une direction. Deux dimensions sont appelées « surface », car une « surface » est ce qui est étendu dans deux directions. Trois dimensions sont appelées « solide », car un « solide » est ce qui est étendu dans trois directions, et il n'est nullement possible de concevoir un solide qui aurait plus de trois dimensions, profondeur, largeur et longueur. [...]

Chapitre VII

Le point, donc, est le commencement de la dimension, mais n'est pas lui-même une dimension, et de même le commencement d'une ligne, mais n'est pas lui-même une ligne ; la ligne est le commencement d'une surface, mais n'est pas surface ; et le commencement du bidimensionnel, mais n'est pas lui-même étendu dans deux directions. De même, la surface est naturellement le commencement du corps, mais n'est pas elle-même un corps, et de même le commencement du tridimensionnel, mais n'est pas elle-même étendue dans trois directions.

Exactement de même pour les nombres, l'unité est le commencement de tout nombre qui progresse unité par unité dans une seule direction ; le nombre linéaire est le commencement du nombre plan, qui s'étend comme un plan dans une dimension supplémentaire ; et le nombre plan est le commencement du nombre solide, qui possède une profondeur dans la troisième dimension, en plus des dimensions initiales. Pour illustrer et classifier, les nombres linéaires sont tous ceux qui commencent par 2 et avancent par l'addition de 1 dans une seule et même dimension ; et les nombres plans sont ceux qui commencent par 3 comme leur racine la plus élémentaire et progressent à travers les nombres suivants. Ils reçoivent également leurs noms dans le même ordre ; car il y a d'abord les triangles, puis les carrés, les pentagones ensuite, puis les hexagones, les heptagones, et ainsi de suite indéfiniment, et, comme nous l'avons dit, ils sont nommés d'après les nombres successifs commençant par 3. [...]

Exercice 2.1. Pourquoi, selon vous, Nicomaque croit-il que l'arithmétique est plus élémentaire que la géométrie ?

Exercice 2.2. Expliquez verbalement ce qu'on entend par « l'indication naturelle, non artificielle et ...la plus simple des nombres. » Comment les nombres naturels sont-ils représentés de cette façon ?

Exercice 2.3. Qu'est-ce que la série naturelle des nombres ?

Exercice 2.4. Après avoir lu les chapitres VI et VII, répondez aux questions suivantes :
- (a) Que signifie « l'unité » ?
- (b) Comment appelle-t-on un objet à une dimension ?
- (c) Comment appelle-t-on un objet à deux dimensions ?
- (d) Comment appelle-t-on un objet à trois dimensions ?
- (e) Selon Nicomaque, existe-t-il des objets dans des dimensions supérieures à la troisième ? Citez un passage pertinent pour justifier votre réponse.

Exercice 2.5. Selon Nicomaque, un point a-t-il une dimension ? Aujourd'hui, un point est souvent considéré comme étant en dimension zéro. Est-ce compatible avec l'affirmation de Nicomaque selon laquelle un point « est le commencement de la dimension » ?

Exercice 2.6.
- (a) Qu'est-ce qu'un heptagone ?
- (b) Esquissez un heptagone régulier, dont tous les côtés sont de longueur égale et tous les angles (intérieurs) de même mesure.

Exercice 2.7. Les Nombres Linéaires. Implicite dans la description de Nicomaque de l'« indication naturelle des nombres » se trouve une correspondance entre les segments de droite et les nombres naturels, que l'on peut appeler « nombres linéaires, » pour reprendre ses propres termes. Rappelons qu'il écrit : « quand trois [alpha] sont mis en ligne ce sera le caractère pour 3, quatre en ligne pour 4, … . » Dans cet exercice, nous développons les nombres linéaires pour cette correspondance, notés L_1, L_2, L_3, etc. Bien que Nicomaque commencerait probablement les nombres linéaires par un segment représentant le nombre deux, nous considérerons le premier nombre linéaire, L_1, comme une configuration initiale représentant un seul point :

$$L_1, \quad \bullet$$

Sous forme d'équation, $L_1 = 1$. Suivant le schéma de Nicomaque, notons L_2 le nombre de points dans un segment avec deux points :

$$L_2, \quad \bullet\,\bullet$$

Sous forme d'équation, $L_2 = 2$. Notons L_3 le nombre de points dans un segment avec trois points :

$$L_3, \quad \bullet\;\bullet\;\bullet$$

Ainsi, $L_3 = 3$. Supposons que ce schéma continue.

(a) Calculez une valeur numérique pour L_4, le quatrième nombre linéaire, c'est-à-dire remplissez le blanc $L_4 = \boxed{}$.

(b) Tracez un segment contenant le nombre de points correspondant à L_4.

(c) Quelle relation géométrique est traduite par l'équation

$$L_4 = L_3 + 1\ ?$$

Plus précisément, que nous dit l'équation $L_4 = L_3 + 1$ sur la façon dont le quatrième nombre linéaire est construit à partir du troisième nombre linéaire en utilisant des points ?

(d) Pour un nombre naturel quelconque n, calculez une valeur numérique pour L_n, le n^{e} nombre linéaire. Vous pouvez supposer que L_n correspond à un segment contenant n points.

(e) Si L_{n-1} désigne le nombre linéaire précédant (juste avant) L_n, trouvez une valeur numérique pour L_{n-1}.

(f) **La formule récursive des nombres linéaires.** Trouvez une équation reliant L_n et L_{n-1} de sorte que

$$L_n = L_{n-1} + \boxed{}.$$

C'est ce qu'on appelle parfois la formule récursive des nombres linéaires.

(g) Que nous dit la formule récursive des nombres linéaires, partie (f), sur la façon dont un nombre linéaire est construit à partir du nombre linéaire précédent en utilisant des points ? Comment cela se compare-t-il à l'affirmation de Nicomaque selon laquelle « les nombres linéaires … avancent par l'addition de 1 dans une seule et même dimension. »

3 Les nombres triangulaires

Chapitre VIII

Un nombre triangulaire est celui qui, lorsqu'il est décomposé en unités, prend la forme triangulaire avec un placement équilatéral de ses parties dans un plan. 3, 6, 10, 15, 21, 28, et ainsi de suite, en sont des exemples ; car leurs formations régulières, exprimées graphiquement, seront à la fois triangulaires et équilatérales. En avançant, vous trouverez qu'une telle série de nombres aussi loin que vous le souhaitez prend la forme triangulaire, si vous posez comme forme la plus élémentaire celle qui naît de l'unité, de sorte que l'unité puisse apparaître potentiellement comme un triangle, et 3 comme le premier en acte.

Leurs côtés croissent selon les nombres successifs ; car le côté de celui qui est potentiellement premier est l'unité ; celui de celui qui est en acte le premier, c'est-à-dire 3, est 2 ; celui de 6, qui est en acte le deuxième, 3 ; celui du troisième, 4 ; le quatrième, 5 ; le cinquième, 6, et ainsi de suite.

Le nombre triangulaire est produit à partir de la série naturelle des nombres disposés en ligne, et par l'addition continue de termes successifs, un à un, depuis le début ; car par les combinaisons et additions successives d'un autre terme à la somme, les nombres triangulaires dans l'ordre régulier sont complétés. Par exemple, à partir de cette série naturelle, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, je prends le premier terme et j'obtiens le nombre triangulaire qui est potentiellement premier, 1, α ; puis en ajoutant le terme suivant j'obtiens le triangle en acte premier, car 2 plus 1 égale 3. Dans sa représentation graphique, il est ainsi composé : deux unités côte à côte sont placées sous une unité, et le nombre trois forme un triangle :

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \alpha \quad \alpha \end{array}$$

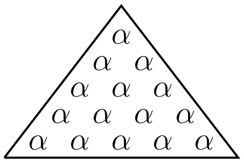
Ensuite, après ceux-ci, le nombre suivant, 3, est ajouté, décomposé en unités et joint au précédent, il donne 6, le deuxième triangle en acte, et de plus, il représente graphiquement ce nombre :

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \alpha \quad \alpha \\ \alpha \quad \alpha \quad \alpha \end{array}$$

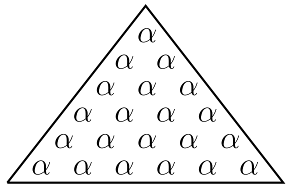
De nouveau, le nombre qui suit naturellement, 4, ajouté et placé en dessous du précédent, réduit en unités, donne celui qui vient en ordre après le susdit, 10, et prend une forme triangulaire :

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \alpha \quad \alpha \\ \alpha \quad \alpha \quad \alpha \\ \alpha \quad \alpha \quad \alpha \quad \alpha \end{array}$$

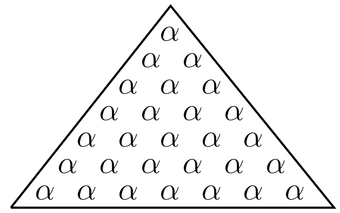
5, puis 6, puis 7, et tous les nombres dans l'ordre, sont ajoutés, de sorte que régulièrement les côtés de chaque triangle contiennent autant de nombres qu'il en a été ajoutés de la série naturelle pour le produire :



CÔTÉ 5



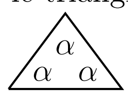
CÔTÉ 6



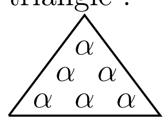
CÔTÉ 7

Exercice 3.1. Dans cet exercice, nous présentons les nombres triangulaires, qui comptent le nombre de points (ou le nombre d'alpha, α) dans des triangles équilatéraux de forme régulière. Bien que Nicomaque soit quelque peu réticent à affirmer que la valeur du premier nombre triangulaire est 1, puisque le triangle tracé autour d'un alpha, , n'est potentiellement que le premier triangle, nous commencerons les nombres triangulaires avec la valeur un. Notons T_1 le premier nombre triangulaire. Alors $T_1 = 1$.

(a) Notons T_2 le deuxième nombre triangulaire. Calculez la valeur numérique de T_2 en comptant le nombre d'alpha (α) dans le triangle :



(b) Notons T_3 le troisième nombre triangulaire. Calculez la valeur numérique de T_3 en comptant le nombre d'alpha dans le triangle :



(c) Notons T_4 le quatrième nombre triangulaire, T_5 le cinquième nombre triangulaire, …, et notons T_n le n^{e} nombre triangulaire pour un nombre naturel n. Remplissez le tableau suivant pour la valeur numérique des huit premiers nombres triangulaires :

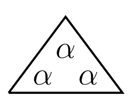
n	1	2	3	4	5	6	7	8
T_n	1							

Quelle stratégie avez-vous utilisée pour calculer les nombres triangulaires ?

(d) Expliquez soigneusement comment T_8 est calculé. Nicomaque inclut-il une figure de ce huitième triangle dans son écrit ?

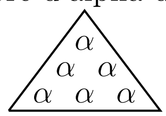
Exercice 3.2. La formule itérative des nombres triangulaires. Nicomaque écrit que « le nombre triangulaire est produit à partir de la série naturelle des nombres … par l'addition continue de termes successifs, un à un, depuis le début … . »

(a) Écrivez T_2, le deuxième nombre triangulaire, comme la somme de deux nombres entiers consécutifs en utilisant le nombre d'alpha dans chaque rangée du deuxième triangle :



Ainsi, $T_2 = \square + \square$.

(b) Écrivez T_3, le troisième nombre triangulaire, comme la somme de trois nombres entiers consécutifs en utilisant le nombre d'alpha dans chaque rangée du triangle :



Ainsi, $T_3 = \square + \square + \square$.

(c) En suivant le format ci-dessus, écrivez T_4 comme la somme de quatre nombres entiers consécutifs de sorte que :

$$T_4 = \square + \square + \square + \square.$$

(d) Quels dix nombres entiers consécutifs faudrait-il additionner pour produire T_{10}, le 10^{e} nombre triangulaire ?

(e) Soit n un nombre naturel quelconque. Trouvez une formule pour T_n exprimant le n^{e} nombre triangulaire comme la somme de n nombres entiers consécutifs. Quelle idée géométrique représente cette formule en termes du nombre d'alpha dans chaque rangée du n^{e} triangle ? Aujourd'hui cette formule est appelée la formule itérative pour T_n.

Exercice 3.3. La formule récursive des nombres triangulaires.

(a) Après avoir achevé la construction de (ce que nous notons) T_2, Nicomaque décrit la construction du triangle suivant comme suit : « le nombre suivant 3 est ajouté, ..., et joint au précédent [triangle]. » En utilisant T_2 pour désigner le nombre triangulaire précédent et T_3 pour le nombre triangulaire suivant, trouvez une équation reliant T_3 à T_2 de sorte que

$$T_3 = T_2 + \square.$$

(b) Pour trouver le nombre triangulaire suivant, Nicomaque indique que « le nombre qui suit naturellement, 4, ajouté et placé en dessous du précédent [triangle], ..., donne ... le suivant [triangle]. » En notant T_3 le nombre triangulaire précédent et T_4 le suivant, trouvez une équation reliant T_4 à T_3 de sorte que

$$T_4 = T_3 + \square.$$

(c) En suivant le format ci-dessus, trouvez une équation reliant T_5 et T_4.

(d) Pour un nombre naturel quelconque n, trouvez une formule reliant T_n au nombre triangulaire précédent T_{n-1}. Exprimez cette formule verbalement en décrivant comment le triangle précédent est utilisé pour construire le triangle suivant. Cette formule est parfois appelée la formule récursive des nombres triangulaires.

(e) En utilisant la partie (d), trouvez une équation reliant T_n à la somme de T_{n-1} et d'un certain nombre linéaire, c'est-à-dire remplissez le blanc de sorte que :

$$T_n = T_{n-1} + L_{\square}.$$

Exercice 3.4. Extra. Disposez deux copies de T_n pour produire un rectangle avec n lignes et $(n+1)$ colonnes. Utilisez cela pour répondre aux questions suivantes.

(a) Trouvez une formule simple pour T_n en termes de n.

(b) Trouvez une formule simple pour $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$ en utilisant la partie (a).

4 Les nombres carrés

Chapitre IX

Le nombre carré est celui qui vient à la suite du précédent, et qui, dans le tracé géométrique, ne donne plus, comme lui, trois angles, mais quatre angles, toujours pourtant en une figure équilatérale : tels sont les nombres 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100. Car les tracés géométriques de ces nombres deviennent des figures quadrangulaires équilatérales, de la manière suivante ;

$$\underset{1}{\boxed{\alpha}} \qquad \underset{4}{\boxed{\begin{array}{cc}\alpha&\alpha\\\alpha&\alpha\end{array}}} \qquad \underset{9}{\boxed{\begin{array}{ccc}\alpha&\alpha&\alpha\\\alpha&\alpha&\alpha\\\alpha&\alpha&\alpha\end{array}}} \qquad \underset{16}{\boxed{\begin{array}{cccc}\alpha&\alpha&\alpha&\alpha\\\alpha&\alpha&\alpha&\alpha\\\alpha&\alpha&\alpha&\alpha\\\alpha&\alpha&\alpha&\alpha\end{array}}} \qquad \underset{25}{\boxed{\begin{array}{ccccc}\alpha&\alpha&\alpha&\alpha&\alpha\\\alpha&\alpha&\alpha&\alpha&\alpha\\\alpha&\alpha&\alpha&\alpha&\alpha\\\alpha&\alpha&\alpha&\alpha&\alpha\\\alpha&\alpha&\alpha&\alpha&\alpha\end{array}}}$$

et ainsi de suite, jusqu'où l'on veut. Du reste, ces nombres ont cela de commun avec les précédents, que l'accroissement des côtés suit la série naturelle des nombres. En effet, celui de ces nombres qui est le premier carré virtuel, c'est-à-dire le nombre 1, a pour coté l'unité ; celui qui est le premier carré effectif, le nombre 4, a pour coté 2 ; celui qui est le second carré effectif, le nombre 9, a pour côté 3 ; celui d'après, qui est le troisième carré effectif, le nombre 16, a pour côté 4 ; le quatrième a pour côté 5 ; la cinquième 6 ; et de même, en général, les suivants ont pour côtés les nombres suivants.

Le nombre carré est engendré, lui aussi, de la série naturelle des nombres exposés en rang, non plus en ajoutant à l'unité et à chacun des nombres suivants le nombre qui vient après, comme il a été montré que cela doit se faire pour les nombres triangles, mais en prenant toujours les nombres séparés par an intervalle d'une unité, c'est-à-dire les nombres impairs. En effet, le premier nombre, qui est 1, est le premier carré virtuel, le second, qui est 1 + 3, est le premier carré effectif ; le troisième, qui est 1 + 3 + 5, est le second carré effectif ; le quatrième, qui est 1 + 3 + 5 + 7, est le troisième carré effectif ; le suivant se forme en ajoutant 9 aux nombres précédents ; le suivant en ajoutant 11, est toujours de même, il arrive également pour ces nombres que le côté de chacun d'eux est d'autant d'unités qu'il y a de nombres ajoutés ensemble pour former chacun de ces nombres.

Exercice 4.1. Les nombres carrés comptent le nombre de points (ou le nombre d'alpha, α) dans des carrés de forme régulière, où la longueur de côté des carrés augmente d'une unité. Encore une fois, Nicomaque est réticent à représenter le premier carré par un alpha, puisqu'un carré tracé autour d'un seul alpha n'est que « potentiellement » un carré. Néanmoins, nous laisserons le premier nombre carré être 1. En symboles, notons S_1 le premier nombre carré, S_2 le deuxième nombre carré, S_3 le troisième nombre carré, etc. Ainsi, $S_1 = 1$.

(a) Calculez la valeur de S_2 en comptant le nombre d'alpha (α) dans le carré :

$$\boxed{\begin{array}{cc} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{array}}$$

Ainsi, $S_2 = \square$.

(b) Pour un nombre naturel quelconque n, notons S_n le nombre d'alpha dans le n^{e} carré. Remplissez le tableau suivant donnant les dix premiers nombres carrés.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_n	1									

Exercice 4.2. Nicomaque affirme que les nombres carrés sont produits en ajoutant les nombres qui sont « en positions alternées, c'est-à-dire les nombres impairs. »

(a) Utilisez le diagramme suggestif suivant

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & \alpha \\ \cline{1-1} \alpha & \alpha \\ \hline \end{array}$$

pour écrire S_2, le deuxième nombre carré, comme la somme de deux nombres impairs consécutifs :

$$S_2 = \square + \square.$$

(b) Utilisez le diagramme suggestif suivant

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \alpha & \alpha & \alpha \\ \cline{1-2} \alpha & \alpha & \alpha \\ \cline{1-1} \alpha & \alpha & \alpha \\ \hline \end{array}$$

pour écrire S_3 comme la somme de trois nombres impairs consécutifs :

$$S_3 = \square + \square + \square.$$

(c) En suivant le format ci-dessus, écrivez S_4 comme la somme de quatre nombres impairs consécutifs.

Exercice 4.3. La Première Différence. Les nombres impairs identifiés géométriquement dans l'exercice (4.2) peuvent être réalisés arithmétiquement en calculant les premières différences, c'est-à-dire les différences de carrés consécutifs.

(a) Calculez $D_1 = S_2 - S_1$.

(b) Identifiez D_1 géométriquement dans la figure dessinée dans l'exercice (4.2), partie (a).

(c) Calculez $D_2 = S_3 - S_2$.

(d) Identifiez D_2 géométriquement dans la figure dessinée dans l'exercice (4.2), partie (b).

(e) Calculez $D_3 = S_4 - S_3$.

(f) Calculez $D_4 = S_5 - S_4$.

(g) Quelle suite de nombres est formée par D_1, D_2, D_3, D_4 ? Incluriez-vous S_1 comme premier terme de cette suite ? Pourquoi ou pourquoi pas ?

Exercice 4.4. La Deuxième Différence. Le schéma formé par les premières différences D_1, D_2, D_3, D_4 est assez évident dans l'exercice ci-dessus. Si ce n'est pas le cas, une autre différence, la deuxième différence, peut être calculée.

(a) Calculez $D_2 - D_1$.
(b) Calculez $D_3 - D_2$.
(c) Calculez $D_4 - D_3$.
(d) Énoncez verbalement un schéma formé par les deuxièmes différences ci-dessus.

Exercice 4.5. Extra. Soit n un nombre naturel quelconque.

(a) **La formule récursive des nombres carrés.** Si S_{n+1} désigne le $(n+1)^{\text{e}}$ nombre carré, alors S_n désigne le précédent. Combien de nouveaux points (ou alpha) faut-il ajouter à S_n pour produire S_{n+1} ? Indice : en pensant géométriquement, ajoutez n points le long de la colonne de droite de S_n, ajoutez encore n points le long du haut de S_n, et ajoutez un point de plus au coin supérieur droit de S_n pour produire finalement S_{n+1}. Remplissez le blanc avec le nombre total de nouveaux points de sorte que

$$S_{n+1} = S_n + \boxed{},$$

et exprimez ce résultat verbalement.

(b) **La formule itérative des nombres carrés.** Trouvez une formule pour S_{n+1} en termes de la somme de nombres entiers impairs consécutifs de sorte que :

$$S_{n+1} = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + \boxed{}.$$

Indice : comparez avec la partie (a) ci-dessus.

Notes à l'enseignant.e

Ce projet est rédigé pour un cours d'introduction de niveau baccalauréat en mathématiques générales pour des étudiants ayant très peu de bases en algèbre. Il pourrait également être utilisé au lycée en première ou terminale, notamment pour susciter l'intérêt des élèves pour les mathématiques et la reconnaissance de schémas. Le projet explore certains nombres combinatoires qui sont apparus historiquement en comptant le nombre de points dans des figures de forme régulière, telles que les triangles, les carrés, les pyramides, etc. Ces nombres sont connus sous le nom de nombres figurés et incluent les coefficients binomiaux, bien que ce dernier point de vue ne soit pas exploré dans le projet. Il y a des sections sur les nombres linéaires, triangulaires, carrés, pentagonaux, pyramidaux, triangulo-triangulaires et à cinq dimensions. Couvert en intégralité, ce matériel formerait un module d'environ quatre ou cinq semaines dans un cours d'éducation générale. Les sources primaires du projet sont l'*Introduction à l'Arithmétique* de Nicomaque [4, 5] et les lettres de Fermat à Mersenne et Roberval [1]. Puisqu'aucune algèbre n'apparaît dans ces écrits, ils constituent un matériel adapté aux étudiants ayant peu de bases en algèbre.

La familiarité avec le comptage et les opérations arithmétiques de base que sont l'addition, la soustraction, la multiplication et la division est considérée comme une connaissance acquise pour les étudiants. De même, les étudiants doivent avoir une connaissance pratique de la notation indicielle, comme T_1, T_2, T_3 respectivement pour les premier, deuxième et troisième termes d'une suite ou série. Un nombre naturel quelconque est noté n et apparaît comme indice générique dans des expressions telles que T_n. La notation sommatoire n'est pas utilisée, bien qu'elle puisse être introduite si souhaité. Le projet reste proche du matériel de source original cité et explore le développement et le calcul des nombres figurés. Des formules algébriques plus subtiles pour ces nombres apparaissent dans les exercices marqués « Extra, » qui peuvent compter comme bonus à la discrétion de l'instructeur. Les instructeurs disposant de temps supplémentaire pourraient développer des applications des nombres figurés au théorème binomial ou à la combinatoire du choix de n objets parmi k, $k \geq n$, des sujets qui ne sont pas couverts dans ce projet. Pour un traitement plus algébrique de ce matériel ainsi que des résultats avec des sommes connexes, voir le projet de David Pengelley « Figurate numbers and sums of numerical powers : Fermat, Pascal, Bernoulli » [6], rédigé pour un cours de licence avancé en mathématiques discrètes ou combinatoire.

Pour bien calibrer la progression du contenu, l'instructeur doit avoir une bonne connaissance des capacités des étudiants. L'instructeur doit également étudier les extraits de sources originales avant le cours et résoudre les exercices avant de les assigner. Nicomaque écrit de façon prolixe et les exercices pour cette source sont conçus pour réitérer et explorer ses affirmations. Les solutions à certains de ces exercices se trouvent dans ses propres mots. Dans sa correspondance, Pierre de Fermat, en revanche, formule des affirmations très concises et générales sur les nombres figurés sans justification. Les exercices sur ce matériel sont conçus pour amener le lecteur à découvrir les schémas énoncés par Fermat. Dans le projet, quelques-unes des affirmations de Fermat sont écrites en latin original, avec des traductions apparaissant dans les exercices, après que les étudiants ont résolu quelques problèmes de découverte.

Il n'est pas nécessaire de couvrir toutes les sections du projet. Pour une compréhension rudimentaire des nombres figurés, couvrez les sections sur les nombres linéaires, triangulaires et pyramidaux. Pour observer comment les premières et deuxièmes différences peuvent être utilisées pour trouver des schémas dans les nombres figurés, couvrez les sections sur les nombres carrés et pentagonaux. Pour ceux souhaitant se concentrer sur les nombres de combinaison (coefficients binomiaux) ou ceux souhaitant utiliser le projet Pascal pour un cours d'éducation générale après ce projet, couvrez les nombres linéaires, triangulaires, pyramidaux, triangulo-triangulaires et à cinq dimensions.

Ce PSP est une traduction abrégée par Yannick Delbecque de l'original anglais.

Le code LaTeX de l'intégralité de ce PSP est disponible auprès de l'auteur sur demande. Le PSP lui-même peut également être modifié par les instructeurs selon leurs besoins pour mieux correspondre à leurs objectifs de cours.

Le développement de ce projet a été partiellement soutenu par le programme « Improving Undergraduate STEM Education » de la Fondation nationale des sciences sous le numéro de subvention DUE-1523747. Toutes les opinions, conclusions et recommandations exprimées dans ce projet sont celles de l'auteur et ne reflètent pas nécessairement les vues de la Fondation nationale des sciences.

Ce travail est publié sous licence Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode). Il autorise la redistribution et la réutilisation d'une œuvre sous licence à condition que le créateur soit crédité de façon appropriée et que toute œuvre dérivée soit mise à disposition sous « la même licence, une licence similaire ou une licence compatible. »

Pour plus d'informations sur TRIUMPHS, visitez

`http://webpages.ursinus.edu/nscoville/TRIUMPHS.html`.

Références

[1] Fermat, P. de *Œuvres de Fermat*, Tannery, P., Henry, C., éditeurs, vol. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1891–1922.

[2] Katz, V. J., *A History of Mathematics : An Introduction*, 3e éd., Addison-Wesley, New York, 2009.

[3] Mahoney, M.S. *The Mathematical Career of Pierre de Fermat*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1973.

[4] Nicomaque, *Introduction à l'Arithmétique*, D'ooge, M. L., traducteur, The Macmillan Company, New York, 1926, pp. 237–251.

[5] Nicomaque, *Introduction à l'Arithmétique*, dans *Great Books of the Western World*, Adler, M. J., éditeur, vol. 10, Encyclopædia Britannica, Chicago, 1991.

[6] Pengelley, D. « Figurate numbers and sums of numerical powers : Fermat, Pascal, Bernoulli, » *Convergence*, Mathematical Association of America, http://www.maa.org/press/periodicals/convergence, DOI :10.4169/loci003987.

[7] Tarán, L., « Asclepius of Tralles : Commentary to Nicomachus' Introduction to Arithmetic, » *Transactions of the American Philosophical Society*, 59, 4 (1969) 5–89.